El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

Director: D. Zoel G. de Galdeano

Año I.	Zaragoza 20 de febrero de 1891.	Núm. 2.°

EL GENERAL IBÁÑEZ

Parece que el desenvolvimiento científico, tan limitado de por sí en España, se halla sometido al influjo de una eterna fatalidad.

Hace poco más de medio año la Facultad de Ciencias de la Universidad Central perdía en menos de un mes dos de sus más distinguidos profesores: D. Simón Archilla, que en sus *Principios de cálculo diferencial* dejó permanente huella, hoy triste recuerdo, de aquella claridad en la exposición tan eficaz para hacer evidentes los más abstrusos conceptos de la difícil asignatura que explicaba y para formar el gusto y la afición por este género de estudios entre cuantos tenían la satisfacción de escuchar su autorizada palabra. D. Gumersindo Vicuña, que además de haber publicado entre sus trabajos científicos su *Teoría y cálculo de las máquinas de vapor y de gas* y su *Introducción á la teoría matemática de la electricidad*, sostuvo durante algunos años la publicación de la revista científica *La semana industrial:* y hoy tenemos que deplorar una nueva pérdida de importantísima consideración con el fallecimiento del general Ibáñez, cuyo nombre, ilustre por muchos conceptos, permanecerá unido á una de las mas notables empresas realizadas por la ciencia moderna. Tal ha sido la unión geodésica y astronómica del Africa y Europa.

Profundos conocimientos teóricos y técnicos y el concurso de sabios distinguidos, eran necesarios para llevar á feliz término tan arduo problema, y nada de esto faltó al respetable sabio, que hizo partícipe á su patria en la obra común que hoy prosigue la ciencia en todos los países.

Para verificar la unión de las triangulaciones española y argelina, se eligieron como vértices de un gran cuadrilátero los picos de Mulhacen y Tética en la *Sierra Nevada* y de *Filabrés* y los picos de *Filhaoussen* y *M'Sabiha*, estos dos últimos del continente africano, é intervinieron en los trabajos geodésicos colaboradores tan distinguidos, de tan reconocida ilustración y competencia como los coroneles Perrier, Barraquer, los comandantes López Puigcerver, Borres, Bassot, etc., y el actual director del Observatorio astronómico de Madrid, D. Miguel Merino, con el ingeniero Sr. Esteban, para la unión astronómica.

Además de esta empresa gloriosa para los dos países que se concertaron para su realización, encomendándola á sabios tan respetables, y que forma una hermosa página en la historia científica del general Ibáñez, se le debe otro descubrimiento de gran trascendencia, recibido con universal aplauso; el aparato para medir bases geodésicas, que ofrece la notable circustancia de permitir que á la rapidez en la ejecución de las operaciones acompañe la precisión en las mismas.

No nos detendremos en lo mucho que pueden decir personas más competentes acerca de los méritos del ilustre sabio que España ha perdido para la ciencia, correspondiendo á otros autorizados críticos el dar razón circunstanciada de cuanto tiene que agradecer la patria á quien dirigió con tan brillante acierto por tantos años sus trabajos geodésicos y estadísticos, y ya que no llegue a más nuestra competencia, hemos de limitarnos á rendirle nuestro insignificante tributo de admiración, evocando el recuerdo de algo entre lo mucho que hizo en su vida científica.

Z. G. DE G.

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

Múltiples fueron las direcciones de la Geometría bajo el impulso que le dieron los talentos que honraron la institución fundada por Monge, y que ha contribuído á dar un período de gloria científica á la Francia.

Si Monge creó la nueva Geometría que refiere las figuras del espacio á figuras planas por combinaciones de planos auxiliares, y prescindiendo en absoluto de toda consideración numérica, Carnot, al proponerse fundar un nuevo algoritmo geométrico en su *Géométrie de position* y en su *Corrélation des figures en Géométrie*, donde se fundieran la magnitud y la posición de tal manera, que las variaciones de la una fueran traducidas inmediatamente por las variaciones de la otra, mediante lo que llamó correlaciones *directa, inversa* y *compleja*, también contribuyó al progreso de la Geometría de Pascal y Desargues en su *Essai sur la Théorie des transversales* que aportó un considerable material para proseguir la organización de este cuerpo de doctrina, legando á la posteridad sus célebres teoremas; el uno, generalización del de Ptolomeo, ó extensión á un polígono cualquiera del hasta entonces solamente aplicado al triángulo; el otro, de mayor importancia, es un teorema fundamental en la teoría de las cónicas, á saber: *si todos los lados de un polígono plano cualquiera ABCDE, ó sus prolongaciones, se hallan cortados por una sección cónica cualquiera, y se designa por (Am) (Bm) los productos de los segmentos interceptados sobre AB entre cada uno de los vértices A y B respectivamente, y las dos ramas de la curva, por (Bn) y (Cn), los productos semejantes relativos al lado BC,* etcétera, se tendrá

$$(Am)(Bn)(Cp)(Dq)(Er) = (Ar)(Bm)(Cn)(Dp)(Eq),$$

teorema que, según hizo ver Carnot, se extiende á todas las curvas geométricas tomadas como transversales, cuando el polígono es plano, y á todas las superficies cuyas secciones hechas por planos cualesquiera, son curvas geométricas, cuando el polígono es alabeado.

Otro de los talentos matemáticos que contribuyeron al renacimiento científico de la Francia, impulsada por los éxitos de Monge, Laplace, Lavoisier y Lagrange, fué Brianchón, cuya *Mémoire sur les lignes du second ordre*, aunque reducida á 65 páginas, es uno de los trabajos fundamentales que dejan huella en el progreso científico, y no es de extrañar que haya bastado para inspirar al geómetra Poncelet su notable obra *Traité de propriétés proyectives des figures*, fundada como él mismo expone en su prólogo, sobre algunos de los fecundos conceptos expuestos en la obra de Brianchón.

Es materialmente imposible condensar en menor extensión cuanto de más esencial constituye la teoría de las cónicas, y sobre todo con mayor elegancia y sencillez.

Definido el polo de una recta como el punto alrededor del que giran las cuerdas de los contactos de los pares de tangentes trazadas desde diferentes puntos de aquélla, en conformidad con la exposición hecha por Monge en su geometría descriptiva, pasa inmediatamente á definir la relación $\frac{AC}{AS} : \frac{BC}{BS} =$ constante, á que conducen tres rectas trazadas por un punto S y cortadas por una transversal arbitraria, de la que resulta la siguiente $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} =$ constante, correspondiente al caso de ser cuatro las rectas. La proporción armónica $\frac{AD-CD}{AD} = \frac{CD-BD}{BD}$ ó $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$ subsiste, según un teorema, de la obra *Opus geometricum*, de Gregoire de Saint-Vincent, Una recta está *dividida armónicamente* por dos puntos, cuando éstos la dividen en segmentos proporcionales. Si una recta AB está dividida armónicamente por dos puntos C y D, la recta CD también lo estara por los dos puntos A y B; y originando *cuatro puntos armónicos* un *haz armónico*, el teorema de Saint-Vincent puede traducirse diciendo que: *Toda transversal trazada en el plano de un haz armónico da por sus intersecciones, cuatro puntos armónicos.*

Pero según la geometría de posición de Carnot, *cada una de las diagonales de un cuadrilátero está cortada armónicamente por las otras dos*, y esto basta para que con *la regla solamente* pueda obtenerse en la misma dirección de tres puntos el cuarto armónico D, propiedad conocida en las secciones cónicas de La Hire. La consideración de un paralelógramo con sus dos diagonales permite deducir, valiéndose de los triángulos semejantes formados en las figuras, las relaciones $\frac{EA.EB}{EC.ED} = \frac{FA.FB}{FC.FD}$, $\frac{CA.CB}{CE.CF} = \frac{DA.DE}{DE.DF}$ que, según Brianchón, tienen lugar para todas las proyecciones de las figuras, como arriba se indicó, de manera que subsistirán todavía, si en lugar de un paralelógramo se considera un cuadrilátero cualquiera cortado por una transversal arbitraria, y como aquí no se trata más que de la dirección de las líneas, y cada par de lados opuestos pueden representar el sistema de diagonales de un nuevo cuadrilátero, de las relaciones anteriores se deducen todas las restantes que forman en los tratados modernos las siete relaciones fundamentales de la involución, que unen los doce segmentos formados sobre los lados de un cuadrilatero completo, cuyas tres diagonales son AB, CD, EF, y que son las traducciones diferentes de una misma propiedad, de manera que, para seis puntos situados en línea recta, cada una de dichas siete condiciones lleva consigo las otras seis. Y cuando aquéllos se hallan ligados por éstas, sus proyecciones gozan de la misma propiedad.

Con estos preliminares Brianchón principia la exposición de las propiedades de las cónicas (lám. I, fig. 1.ª).

Suponiendo trazada en el plano de un cuadrilátero $UXYZ$ inscrito á una cónica, una recta en la cual AB, CD, EF son los segmentos producidos por la curva y los dos pares de lados opuestos XU y ZY, ZU y YX de aquél, ante todo demuestra que los seis puntos A, B, C, D, E, F se hallan ligados entre sí por las siete relaciones arriba deducidas, y puesto que basta deducir y establecer la proposición para una de las perspectivas de la figura, lo hace así para el caso de ser un círculo, fundándose sencillamente en la propiedad que tiene el producto de los segmentos trazados desde un punto cualquiera, que es constante. Además, la aplicación del teorema de Ptolomeo al triángulo FTE formado con el segmento EF de la transversal y dos lados opuestos ZU y XY del cuadrilátero, con cada una de las transversales UX y ZY le conducen á la relación $\frac{EA.EB}{EC.ED} = \frac{FA.FB}{FC.FD}$, y por consiguiente á concluir, que las siete ecuaciones fundamentales quedan satisfechas, y resulta que: *dado un cuadrilátero cualquiera inscrito en una cónica y una recta indefinida trazada arbitrariamente, la cuerda interceptada en ésta entre las ramas de la curva, se hallará cortada en dos segmentos por cada uno de los lados del cuadrilátero prolongados á discreción; y si en el mismo orden se formara la razón de los dos segmentos que corresponden á cada lado, el producto de las razones correspondientes á dos lados opuestos será igual al producto de las razones correspondientes á los otros lados.*

Después de señalar como consecuencias inmediatas de estas conclusiones, que en las curvas de segundo orden las cuerdas paralelas tienen sus puntos medios distribuídos en una recta que se llama *diámetro*, así como las propiedades concernientes á los *centros, diámetros conjugados, etc.*, llega al célebre teorema de Pascal solamente con aplicar el teorema de Ptolomeo al triángulo ETF de la figura empleada anteriormente, en la que D, H, I son las intersecciones de los lados opuestos del exágono $ABUZYX$ cortado sucesivamente por las transversales UX, YZ, UB, AX y multiplicando por la que arriba se deduce, ó sea $FA.FB.ECED = EA.EB.FC.FD$, las $EC.FC.ZU = EC.FU.ZX$ y $EU.FD.FZ = ED.FE.EU$ se obtiene

$$EX.EY.EA.FB.TU.TI = EA.EB.FU.FE.TX.TY. \quad (\gamma)$$

y multiplicando la $EY.FD.EF = ED.FZ.ZX$. y las $EI.FD.FU = EB.FU.TI$, $EX.FA.FU = EA.FU.EX$ dividiendo después por la fórmula (γ) obtiene fácilmente $EI.FD.TU = ED.FU.ZY$, que según el teorema de Ptolomeo exige se hallen los tres puntos I, II, D en línea recta, determinando una transversal en el plano del triángulo ETF.

(Se continuará).

LEITFADEN DER EBENEN GEOMETRIE

(GUÍA DE LA GEOMETRÍA)

Bearbeitet von Dr. Hubert Müller

Una obra que reuna á la brevedad y sencillez la condición de poner en conocimiento de los lectores cuestiones generalmente juzgadas como de un orden superior á las propias de los elementos, constituye un verdadero triunfo para el autor, y esto puede aplicarse á la obra del Dr. Hubert Müller, constituida por tres reducidos cuadernos: el 1.° (cuya 3.ª edición apareció en 1889) trata de las figuras rectilíneas y del círculo; el 2.° es un desarrollo del primero, al mismo tiempo que una introducción á la «Geometría moderna», y el 3.° se halla destinado á las secciones cónicas y á los elementos de esta geometría.

Esta obra, como su título indica, no es un tratado completo de Geometría; su autor se ha propuesto iniciar al alumno mediante una breve exposición, en las cuestiones más varias, en los conceptos más capitales de la ciencia de la extensión. El molde de la geometría euclidiana ha quedado profundamente alterado bajo la multiplicidad de las modernas teorías, que se imponen con imperiosa necesidad y que se hallan combinadas con el dogmatismo característico de la geometría tradicional.

No es la obra de que tratamos la única en su género, pues en la docta Alemania se intenta constantemente por los escritores matemáticos, exponer la geometría proyectiva, la geometría de la relación anarmónica, de la dualidad y de la polaridad, etc., ya sola, ya combinada con la geometría elemental; y uno de los más notables ejemplos que pueden ser citados, justificando nuestro aserto, es el ofrecido por la ya vulgarizada geometría del ilustre profesor Baltzer.

Acaso esta nueva evolución de la enseñanza no hubiera tardado tanto en ser un hecho, si, como dice Chasles en su obra *Los trois livres de porismes d'Euclide*, la obra del geómetra griego, solo conocida por los vestigios que de ella se conservan en las obras de Pappus, se hubiera transmitido hasta nosotros bajo la influencia decisiva de tan respetable autoridad.

La variedad de teorías con que se ha enriquecido la geometría, exige una alteración en el plan de exponerla y de enseñarla. El riguroso dogmatismo de los elementos de Euclides siempre es admirable, siempre ofrece un modelo de lógica que lleva á las inteligencias por un encadenamiento de consecuencias de solidez inquebrantable; pero las verdades en él relacionadas que se refieren exclusivamente á la perpendicularidad, al paralelismo, á la igualdad ó la desigualdad y á la proporcionalidad, han hecho sitio á otras proposiciones, en las cuales se prescinde de estos modos especiales de la posición y de la magnitud.

La geometría de Euclides, ya cual salió del pensamiento de este geómetra, ya según la han presentado modificada autores como Legendre, Lacroix, etc,, favorece el desarrollo intelectual, por cuanto exige del espíritu fijeza y una fuerza suficiente para ahondar en los elementos de cada cuestión, para analizarla en sus más mínimos detalles; pero no es tan eficaz para educar los espíritus en el modo de producir grandes síntesis y llevarlos á esferas más amplias, donde las ideas se hallan enaltecidas por su generalidad, esto es propio y exclusivo de los métodos modernos.

En la obra del Dr. Müller se halla expuesta la geometría elemental, revestida de ese carácter generalizador propio de la geometría moderna, que debe al predominio de la idea de situación ó disposición de los elementos de las figuras, así como al concepto de correlación, que permite duplicar las proposiciones bajo la forma simétrica impresa por la constante aplicación del principio de la dualidad.

Según este principio, al considerarse en un plano infinidad de rectas que pasan por un punto, se considerarán los infinitos puntos que se hallan en línea recta, y el conjunto de aquéllas conducirá al *haz de rayos* como el de éstos á la *serie de puntos*. Al ángulo, figura compuesta por *dos rectas concurrentes en un punto*, corresponde el segmento rectilíneo formado por *dos puntos situados en línea recta*.

Además, el *movimiento* y por consiguiente su dirección ó sentido (lo que implica la consideración del *signo*), son otros dos conceptos capitales en la exposición moderna, generalmente adoptados en las obras de los geómetras alemanes, y así á la *rotación* alrededor de un punto, se hace corresponder la *traslación* según una recta.

Claro es que, siendo la simetría el caso más sencillo de disposición que pueda considerarse en las figuras geométricas, tiene que ser empleado desde luego en la exposición elemental. Esto se observa en la *Guía de Geometría* de que se trata. La simetría con respecto á un eje es de suma importancia, porque en ella estriba uno de los procedimientos de la Geometría elemental, el *rebatimiento*.

La simetría con relación á un punto, permite el empleo de otro procedimiento, el *giro*, conduciendo uno y otro á la *superposición* de las figuras, que lleva á la demostración de los teoremas. Así, la simetría de las rectas que forman con otra dos ángulos alternos internos iguales conduce á demostrar que estas dos rectas no se encuentran, ó que son paralelas. Después, en la obra del Dr. Müller la consideración de la simetría está enlazada con la de la perpendicular en el punto medio de la recta que une dos puntos B y B' ó con la bisectriz del ángulo de dos rectas b y b' correspondientes, y en cuanto á la teoría de las paralelas, después de haber deducido el paralelismo de la igualdad de los ángulos alternos internos, admite como postulado la contraria de esta proposición, subordinando así, hasta la coordinación de los teoremas al espíritu de simetría.

El *cuadrivértice* y el *cuadrángulo* correspondientes al elemento punto ó recta y la correlación entre los vértices del uno y los lados del otro, las variedades de ellos que resultan del modo de coordinarse entre sí los puntos ó las rectas, las diversas relaciones de simetría que resultan en el círculo, familiarizan al lector en este arte de ordenar y combinar característico de la Matemática más que de ninguna otra ciencia.

La exposición en doble columna de los teoremas que expresan correlaciones deja profundamente grabadas las propiedades que por efecto de esta asociación natural, facilitan el recordar las unas por medio de las otras y hacerlas depender por medio de otras verdades y procedimientos demostrativos sujetos á su vez á la ley de la dualidad.

Como ejemplos de esta disposición pueden citarse los siguientes:

El lugar geométrico de los puntos que distan igualmente de dos puntos dados, es la perpendicular en el punto medio de la recta que los une.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados de un ángulo es la bisectriz de los lados de éste.

Existe solamente un punto que equidista de los *vértices* de un triángulo, que es el centro del círculo *circunscrito*, en el cual se cortan las *perpendiculares* en los puntos medios de los lados de aquél.

Existe solamente un punto que equidista de los *lados* de un triángulo, que es el centro del círculo *inscrito*, en el cual se cortan las *bisectrices* de los ángulos de aquél.

En un cuadrilátero inscrito en un círculo, la suma de los ángulos es 180°.

En un cuadrilátero circunscrito, las sumas de los lados opuestos son cantidades iguales.

Ciertamente que estas proposiciones no se hallan en la correlación perfecta que es objeto de la Geometría moderna; pero ofrece ventajas para la asimilación de las ideas este primer paso dado en la ciencia, que debe disponer al principiante para lanzarse á otras regiones superiores, donde las verdades se unen y armonizan de una manera más compleja en los conceptos cada vez más generales que las contienen.

Nada añadiremos á lo dicho sobre otras muchas particularidades dignas de observarse en la obra del Dr. Müller, entre ellas cuanto podría decirse respecto al gran número de problemas que completan la parte teórica, pues con lo indicado basta para formarse una idea del plan seguido por su autor.

ZOEL G. DE GALDEANO.

GENERALIDADES SOBRE LAS PUBLICACIONES PERIODICAS

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

publié sous la directiòn de M. de Longchamps.

Cuando nos detenemos á considerar ese inagotable caudal formado por conceptos, teorías y doctrinas de variedad tanta que se pierde más allá de cuanto nuestra imaginación puede representarse y á que la Matemática tiende por combinaciones sucesivas de sus ideas fundamentales, nuestro espíritu decae, y por un momento renuncia á empeñarse en una lucha desigual y de resultados inciertos.

El contraste de la inteligencia limitada con la ciencia infinita ó al menos de extensión indefinida, inclina desde luego á la inacción más bien que á vencer lo en apariencia insuperable, y sin embargo, en el dominio de los hechos vemos realizarse lo contrario. Las obras se suceden con rapidez asombrosa, encerrando en sus páginas cada vez más diversas teorías, enlazando lo nuevo con aquello que acumularon las síntesis parciales de la ciencia del pasado, y fundiéndose en otra síntesis superior que prepara nuevas síntesis en este proceso continuo originado por la perfectibilidad indefinida del conocimiento humano.

La ciencia progresa, y la inteligencia se desenvuelve conservando cierto personalismo, merced á la eficacia de métodos cada vez más fecundos en recursos para encadenar mayor número de verdades dentro de sistemas cada vez más amplios.

Desgraciadamente en España no se han llevado á la práctica estos procedimientos generalizadores, que desenvolverían las aptitudes intelectuales de los alumnos y los dispondrían para adquirir más ciencia. Esta es esencialmente educativa, y es como el ambiente donde se desarrollan y acrecen las energías del espíritu. Pero no vamos á seguir en este camino, que nos desviaría de nuestro principal objeto, cual es el hacer alguna indicación relativa á la influencia que ejercen las publicaciones periódicas en la cultura general. No vamos á examinar éstas en las diversas graduaciones que ofrecen material adecuado, tanto para el alumno que se inicia en los estudios matemáticos, como para el sabio que lee los últimos descubrimientos en las Memorias de las Academias. Hoy vamos á indicar simplemente algo de las Revistas ó publicaciones destinadas á la juventud, que desde el libro de texto se dispone á escalar nuevas alturas.

En Italia se publica, bajo la dirección del célebre matemático señor Battaglini, el *Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiana,* periódico en realidad también dedicado á otro público de superior ilustración, por la importancia de muchas teorías que desarrollan en él los más notables profesores de las Universidades. En Francia, los *Nouvelles annales de Mathématiques,* dirigidos por los señores Brisse y Rouché, tienen parecido objeto, puesto que se hallan destinados á lectores, como los aspirantes á las Escuelas especiales, á la Licenciatura y á la Agregación.

Otro periódico importante para los que desean iniciarse en la Matemática, es el *Journal de Mathématiques*, de M. Longchamps. En éste se ha llegado á separar las dos secciones de matemáticas elementales y especiales, de manera que hasta los aspirantes al bachillerato en ciencias ó á las Escuelas politécnica, normal ó central, tienen un gimnasio intelectual donde ensayar sus aptitudes ó adquirir múltiples puntos de vista sobre variados asuntos, ó ejercer su actividad en la resolución de problemas cuyos procedimientos, debidos á alumnos de las diferentes escuelas, merecen los honores de la publicidad, y en fin, donde los profesores de tal ó cual centro de enseñanza tienen ancho campo para dar á conocer los resultados de sus investigaciones y ofrecer á sus alumnos un complemento á los conceptos formados en los libros de texto, algo que sirva de excitador á las fuerzas del espíritu para acostumbrarlo á caminar con iniciativa propia y los emancipe por completo de ese influjo avasallador que ejerce la memoria cuando solo se aspira, como por desgracia ocurre en nuestro país, á repetir con una rigidez perjudicial á la flexibilidad del espíritu, con una invariabilidad que deja como cristalizados los resortes de la inteligencia, lo expuesto en mejor ó peor orden en tal ó cual libro que á veces ni responde á las exigencias de la actualidad, ni ha reformado lo que es reformable para hacer posible ese equilibrio que debe existir entre los progresos de la ciencia y entre el perfeccionamiento de la enseñanza.

Vamos, para terminar, á hacer una breve indicación de algunas cuestiones tratadas en el *Journal de Mathématiques*, de M. de Longchamps. En los últimos números recibidos, correspondientes á este año, *Las coordenadas cuadripolares*, de M. L. Bezenech; *Los progresos de la Geometría del triángulo en 1890*, por M. E. Vigarié; *Ensayo sobre un programa de matemáticas para uso de la clase de matemáticas elementales*, son los principales asuntos tratados en la sección elemental, y en lo concerniente á la otra de matemáticas especiales, la *Extensión de la fórmula de interpolación de Lagrange*, por M. C. A. Laisant; el *Estudio de los conos que pasan por la intersección de dos cuádricas*, por M. Humbert, y variada colección de ejercicios geométricos forman casi la totalidad del fascículo correspondiente al mes de enero, y por ahora solo indicaremos que en el último tomo publicado, dan idea del género de asuntos que ofrece á sus lectores el periódico dirigido por M. de Longchamps, la serie de artículos de M. E. Lauvernay, cuyo epígrafe es *Teoremas sobre las transversales:* el *Estudio sobre la Geometría de las secciones cónicas,* por M. Aug Morel; los trabajos sobre *Las propiedades del triángulo y sobre el centro de las distancias proporcionales,* de M. L. Bezenech; la *Aplicación de los determinantes á la Geometría,* por el mismo, y *El porisma 176 de Euclides y sus consecuencias,* por M. Vigarié, con lo que basta para formarse idea de la índole de la publicación.

Z. G. DE GALDEANO.

LAS EQUIVALENCIAS Y SUSTITUCIONES EN LOS TEOREMAS Y EN LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

La Geometría es un encadenamiento de proposiciones que, partiendo de un reducido número de conceptos fundamentales perfectamente definidos, llega por su combinación continuada á relaciones cuyo número es cada vez más considerable.

Solo nos fijaremos por ahora en las que dependen de las dos figuras fundamentales de la Geometría elemental: la recta y la circunferencia, á las cuales tan solo se hará referencia en las cuestiones que vamos á tratar.

La determinación de una recta y de una circunferencia por dos y tres puntos respectivamente, son la base del edificio geométrico formado por combinaciones de estos elementos.

El paralelismo es el caso de la determinación de una recta cuando uno de los puntos está en el infinito; y lo mismo sucede cuando de la consideración del triángulo se pasa á la figura formada por dos paralelas y una recta que las corta; por esto las propiedades relativas á la suma angular no altera en uno y otro caso, es decir, que la suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos rectos, como la suma de los ángulos internos situados á un lado de la secante, etc. Y todo se reduce en general á pasar de unas figuras á otras, valiéndose de procedimientos varios, como el giro, la traslación, el rebatimiento, etc.

Los diferentes teoremas relativos á igualdad de triángulos al paralelógramo, etc., expresan otras tantas maneras de determinarse puntos ó rectas, y sirven de fundamento para la resolución de los problemas.

La resolución de un problema se reduce á la determinación de un elemento geométrico ó varios; y esta determinación se efectúa mediante cierto número de determinaciones sucesivas que enlazan los datos con los resultados y que constituyen en conjunto una figura más ó menos compleja, por la que se pueda avanzar desde aquéllos hasta éstos, ó bien retroceder por un encadenamiento inverso desde éstos á aquéllos.

El análisis es un método general que lleva gradualmente desde la figura que hipotéticamente da la resolución del problema hasta otra figura final cuya construcción es factible. Entonces puede retrocederse por la misma serie de construcciones intermedias hasta la construcción de las figuras que principió el encadenamiento, y el problema queda resuelto mediante la síntesis (serie inversa de construcciones), que sirve de complemento al análisis (serie directa).

En ciertos casos basta, para llegar al resultado, la aplicación de algún concepto general que envuelve la resolución del problema. Así, por ejemplo, cuando se da una recta AB y un sistema de parelelas aa', bb', cc',..... iguales entre sí trazadas desde los puntos a, b, c,..... de dicha recta, el lugar geométrico de los puntos a', b', c',..... se llega á determinar recordando una propiedad del paralelógramo y el principio de la teoría de las paralelas: *por un punto solo puede trazarse una paralela á una recta.*

Análogamente se procederá, si en vez de la recta AB se supone una circunferencia, siendo el lugar geométrico de los puntos a', b', c',... otra circunferencia igual á la primera, bastando para asegurarse de este resultado apoyarse en una propiedad del paralelógramo.

En resumen. Los principios fundamentales expuestos en la teoría, aplicándose más ó menos inmediatamente á la resolución de un problema, conducen á ésta, ya por el método sintético, ya por el analítico; en este caso, generalmente, cuando la aplicación exige el empleo de algunos términos medios ó enlaces auxiliares.

Cuando diferentes puntos a, b, c,..... son tales, que las rectas ab, ac, ad,..... son paralelas á otra recta dada, dichos puntos se hallan en línea recta, ó también, cuando dichas rectas ab, ac, ad,..... pasan por un punto fijo A, ó si los pies de las perpendiculares bajadas desde dichos puntos, a, b, c,..... coinciden, ó en fin, si, pasando una recta AaA' por el punto a, los ángulos Aab, Aac,..... son iguales.

La proporcionalidad de segmentos permite de muy variadas maneras determinar líneas rectas. Así, por ejemplo, los extremos a', b',

c',..... de un sistema de paralelas que parten de puntos a, b, c,..... de una recta, determinan una recta.

Avanzando más en la teoría, los lemas de Pappus y muchos porismas de Euclides expresan la determinación de una recta fundada en los principios hoy llamados de las relaciones anarmónica y armónica.

Los ángulos cuyos lados pasan por dos puntos fijos, determinan con sus vértices una circunferencia.

La igualdad de productos $AO.BO$ y $CO.DO$ correspondiente á dos rectas AB y CD concurrentes en un punto O, determina el cuarto punto que se halla en la circunferencia determinada por los otros tres.

La relación $\frac{CA}{CB}$ = constante, determina también el punto C como de una circunferencia cuyo diámetro está determinado por los conjugados armónicos de A y B.

Además de los teoremas que determinan la recta y el círculo por las varias propiedades cuyo examen hace la Geometría, ésta, mediante combinaciones ulteriores, permite la transformación de unas figuras en otras, y los procedimientos empleados con tal objeto son numerosísimos.

La translación, el giro y el rebatimiento son procedimientos los más elementales que duplican las figuras y agregan á los elementos primitivos otros relacionados con ellos de una manera sencilla. Hay otras transformaciones más complicadas, como son la homotecia y el método de transformación por radios vectores recíprocos, por las cuales, mediante una igualdad de relaciones ó de productos de segmentos, se pasa de una figura á otra.

La Geometría superior con sus teorías de las series homográficas y de la involución, ofrece medios de pasar de un sistema de puntos á otro sistema de puntos. La homología determina el trazado de una figura dependiente de otra dada, así como la homografía, y en fin, la teoría de las polares recíprocas lleva, como se sabe, una duplicación á la Geometría.

Pero no basta poseer un sistema de verdades relacionadas en un organismo científico ó sistema, que constituye la parte teórica, es necesario poseer un arte complementario por el cual ésta trascienda á los dominios de lo práctico y llegue á ser útil por sus aplicaciones.

En la teoría, las verdades se hallan encadenadas por relaciones de coordinación y subordinación dependientes de un plan general.

En las aplicaciones, á cada cuestión ó problema se refieren de las más diversas maneras teoremas, á veces los más heterogéneos, los más distintos por su objeto y por su naturaleza; y esto se emancipa de toda regla hasta el punto de llegar á depender del talento ó de los conocimientos de cada individuo, lo que origina cierta indeterminación y libertad dentro de las muchas direcciones posibles en cada caso.

(Se continuará).

ALGEBRA AN ELEMENTARY TEXT-BOOK

(2.ª edic. 1889) 2 tomos de 559 y 588 páginas

El Álgebra del profesor Chrystal es un tratado original por la disposición de las materias en ella contenidas, y ofrece un admirable conjunto por la elección que ha hecho de la totalidad que constituye esta rama de la Matemática, haciendo predominar el carácter combinatorio propio de la misma.

No extrañará ciertamente ver en esta interesante obra teorías que otros autores exponen en los cursos de Análisis, por cuanto éstas pueden ser consideradas según diversos aspectos, y al preferirse unos á otros varían sus coordinaciones posibles en la ciencia.

El Álgebra, en su mayor latitud, se refiere á la idea de combinación, como el Análisis concierne esencialmente á la continuidad ó discontinuidad, es decir, á la magnitud en su estado de variación. Y siendo imposible reparar en absoluto estos dos conceptos que simultáneamente figuran en las cuestiones matemáticas, de aquí resulta la diversidad de disposiciones que se observan en los varios libros escritos según el criterio especial de cada autor.

Considerando el Álgebra en su primer desarrollo como una generalización gradual de la Aritmética, que si el Álgebra ha de ser algo superior á una agrupación de reglas inconexas, se impone necesariamente introducir las tres leyes fundamentales del cálculo y la idea de *forma algébrica* como base de su moderno desarrollo, principia Mr Chrystal por exponer las leyes *asociativa* y *conmutativa* deducidas de consideraciones aritméticas.

Definida la substracción como la operación inversa de la adición, de modo que, para cualquiera interpretación de la operación $+b$, la operación $-b$ anule el efecto de $+b$, y viceversa, el signo $-$ se define respecto al signo $+$ por las ecuaciones

$$+a-b+b=+a, \quad (1) \text{ ó } a+b-b=+a, \quad (2)$$

que pueden también escribirse así:

$$+(+a-b)+b=+a \quad (1') \quad +(+a+b)-b=+a \quad (2')$$

Y puesto que por la definición de la relación mutua entre la adición y la substracción tenemos

$+a+b-c=+a-c+c+b-c=+a-c+b+c-c$ (por la ley conmutativa de la adición), $=+a-c+b$ (por la definición de la substracción).

También $+a-b-c=a-c+c-b-c$ (por definición) $=a-c-b+c-c$ (por el caso anterior) $=a-c-b$ (por definición), resultando que *en un encadenamiento de adiciones y de substracciones, los diferentes términos pueden escribirse en cualquier orden unidos á sus signos propios,* apareciendo con esto plenamente el significado atribuído al operando y al operador.

Además, por la definición de las relaciones mutuas entre la adición y la substracción, tenemos

$$+a+(+b-c)=+a+(+b-c)+c-c=+a+b-c, \quad (1)$$

y por definición

$$+p+b-c+c-b=+p+b-b=+p,$$

resultando de esto que

$a-(+b-c)=a-(+b-c)+b-c+c-b=a-(+b-c)+(+b-c)+c-b$ (por el caso (1),, $=a+c-b$ (por la definición), $=a+b-c$ (por la ley conmutativa ya establecida).

De todos los resultados anteriores se desprende la ley asociativa para la adición y la substracción, simbolizada como sigue:

$$\pm(\pm a\pm b\pm c\pm etc.)=\pm(\pm a)\pm(\pm b)\pm(\pm c)\pm etc.$$

con la siguiente ley de signos:

$$+(+a)=+a, \quad -(+a)=-a, \quad +(-a)=-a, \quad -(-a)=+a,$$

cuya expresión verbal es la siguiente: *si cualquier número de cantidades afectadas con los signos + ó — se halla en un paréntesis, éste puede suprimirse, permaneciendo lo mismo todos los signos si + precede al paréntesis, cambiando + en — y — en +, si precede al paréntesis el signo —.*

En la multiplicación establece análogamente las leyes conmutativa y asociativa

$\times a\times b\times c=\times a\times c\times b=\times b\times c\times a$, etc. y $\times a\times(\times b\times c)=\times a\times b\times c$,

llevándole la consideración del multiplicando y multiplicador compuestos á expresar la tercera de las grandes leyes del Álgebra, la ley **distributiva**:

$$+a\times(+b+c)=+a\times b+a\times c, \text{ etc.}$$

cuya expresión simbólica es

$$(\pm a\pm b)\times(\pm c\pm d)=(\pm a)\times(\pm c)+(\pm a)\times(\pm d)+(\pm b)\times(\pm c)+(\pm b)\times(\pm d),$$

con la siguiente ley de signos:

$$(+a)\times(+c)=+ac. \ (+a)\times(-c)=-ac, \text{ etc.}$$

principiando en la división por definir la relación mutua de los signos $\times$ y $:$ mediante las expresiones

$$\times a:b\times b=\times a, \ (1) \qquad \times a\times b:b=\times a, \ (2)$$

y siendo inversa la división de la multiplicación, se tiene

$\times a\times b:c=\times a:c\times c\times b:c$ (por definición) $=\times a:c\times b\times c:c$ (por la ley conmutativa en la multiplicación) $=\times a:c\times b$ (por definición).

Además, $\times a:b:c=\times a:c\times c:b:c$ (por definición) $=\times a:c:b\times c:c$ (por el caso anterior) $=\times a:c:b$ (por definición).

La ley conmutativa así establecida, puede enumerarse como sigue: *En un encadenamiento de multiplicaciones y de divisiones es indiferente el orden siempre que se conserve el signo propio á cada constituyente*, ó en símbolos, para dos constituyentes:

$$\underset{:}{\times} a \underset{:}{\times} b=\underset{:}{\times} b \underset{:}{\times} a,$$

expresión que incluye cuatro casos.

La ley asociativa, para dos constituyentes, será en símbolos:

$$\underset{:}{\times}\left(\underset{:}{\times} a \underset{:}{\times} b\right)=\underset{:}{\times}\left(\underset{:}{\times} a\right)\underset{:}{\times}\left(\underset{:}{\times} b\right),$$

con la siguiente ley de signos:

$$\times(\times a)=\times a, \ \times(:a)=:a, \ :(\times a)=:a, \ :(:a)=\times a,$$

incluyendo dicha ecuación ocho casos:

$$\times(:a\times b)=:a\times b, \ :(:a\times b)=\times a:b, \text{ etc.}$$

No difieren, pues, la adición y la substracción de la multiplicación y división en cuanto concierne á las leyes conmutativa y asociativa; pero esta dualidad desaparece, en cuanto concierne á la ley distributiva.

En la división, el dividendo puede ser distribuido, aplicándose á los signos de los cocientes parciales la misma ley que en la multiplicación. Así:

$$(+a-b):(-c)=-a:c+b:c.$$

Pero la ley distributiva no es aplicable al divisor, no siendo cierto que $a:(b+c)=a:b+a:c$.

Estas indicaciones revelan el carácter del Álgebra de Mr. Chrystal, en conformidad con el de los matemáticos ingleses, á quienes se debe principalmente los progresos de los métodos simbólicos. Y numerosos ejemplos pueden citarse que confirman este aserto. Así en la división de monomios, se tiene

$\frac{a^m}{a^n}=(a\times a\times\ldots\ m$ fact.^{s}) $:(a\times a\times\ldots\ n$ fact.^{s}) (por la definición del exponente $=a\times a\times\ldots\ m$ fact.^{s} $:a:a:\ldots\ n$ divisores (por la ley asociativa).

Ahora, si $m>n$, resulta

$\frac{a^m}{a^n}=(a\times a\times\ldots\ \overline{m-n}$ fact.^{s})$\times$)$a:a)\times(a:a)\ldots\ n$ fact.^{s} (por las leyes conmutativa y asociativa) $=a\times a\times\ldots\ \overline{m-n}$ fact.^{s}, por las propiedades de la división $=a^{m-n}$.

Si $m<n$, $\frac{a^m}{a^n}=:(a\times a\ldots\ \overline{n-m}$ factores) $\times\ (a:a)\times(a:a)\ldots..\ m$ factores $=:a^{n-m}=\frac{1}{a^{n-m}}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^m=(a:b)\times(a:b)\times\ldots\ m$ factores (por definición) $=(a\times a\times\ldots\ m$ factores) $:(b\times b\times\ldots\ m$ factores) (por conmutación y asociación)$=a^m:b^m=\frac{a^m}{b^m}$.

En las operaciones con fracciones, se tiene

$$\frac{pa}{pb}=(pa):(pb)=p\times a:p:b=a:b:p\times p=a:b,\text{ es decir, }\frac{pa}{pb}=\frac{a}{b}$$

En la multiplicación:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)=(a:b)\times(c:d)=a:b\times c:d=a\times c:b:d=(ac):(bd)=\frac{ac}{bd}.$$

Para exponer el caso general de la ley distributiva, principia por el caso de tres factores

$$(a+b+c+\ldots)\ (a'+b'+c'+\ldots)\ (a''+b''+c''+\ldots)$$

que conduce á

$$(aa'+ab'+\ldots+ba'+bb'+\ldots)\ (a''+b''+\ldots)\text{ y á }aa'a''+aa'b''+,\text{ etc.,}$$

y, en particular, á las expresiones

$$(a+b)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b,\ (a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc,\text{ etc.}$$

y en el caso de un producto

$$\Pi(b+c)=\Sigma b^2c+2abc.$$

Las teorías de las funciones enteras, de la homogeneidad y de la simetría, tienen el mismo carácter que lo expuesto, y en las diferentes proposiciones predomina la idea de combinación sobre la de magnitud, y conserva el autor el mismo carácter en las teorías que hace seguir á éstas, de modo que el Álgebra aparece como la ciencia de las transformaciones de la cantidad, ó de las reducciones unas á otras de las diferentes formas de ésta. Así dedica el capítulo V á las *transformaciones de los cocientes*, cuyo teorema fundamental se expresa en la fórmula

$$\frac{A_m}{D_n}=P_{m-n}+\frac{R}{D_n}$$

en la cual los subíndices representan los grados de las funciones enteras á que afectan y R indica una función, á lo más del grado $n-1$.

En esta cuestión es de gran importancia el caso en que el divisor es un binomio $x-\alpha$, puesto que la ley de la formación del resto es el fundamento de la descomposición de una función entera en factores lineales, y el modo gradual de elevarse en la ciencia, seguido por Mr Chrystal, permite que el alumno se vaya enterando de las limitaciones y dificultades que ofrece la resolución de ciertos problemas y los artificios mediante los cuales van desapareciendo á medida que se emplean nuevos procedimientos. Así, después de haber examinado las funciones enteras como múltiplos ó divisores de otras al tratar del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, insiste en la descomposición de una función entera en factores, dando la solución general para el caso de la de 2.º grado.

(Se concluirá).

LA INTRODUCCION AL ESTUDIO DEL CALCULO INFINITESIMAL

POR

D. HORACIO BENTABOL

profesor de la Escuela general preparatoria de ingenieros y arquitectos

Para los adelantos de la ciencia, como para la transmisión de la misma, siempre son de importancia capital los conceptos generales que constituyen puntos de vista más ó menos elevados desde los cuales se dominan las regiones inferiores de las verdades particulares y de las aplicaciones. Cuando la inteligencia se posesiona de estos dominios, su marcha es expedita y franca, no encuentra obstáculos serios que la resistan, y lo mismo invade nuevos dominios sobre los que se posesiona después de fácil conquista, que desmenuza los detalles y los hace servir como comprobación de aquello que adivinó en sus primeras intuiciones.

La ciencia es una síntesis tanto más grandiosa cuanto mayores han sido sus progresos, y esta síntesis ayuda á las inteligencias haciéndolas cada vez más aptas, para con menor esfuerzo obtener mayor suma de resultados. Por esto los libros ú obras destinados á fijar los puntos de vista generales son de utilidad grande, porque llevan algo de ese espíritu sintético al que desea iniciarse ó profundizar en los secretos de la ciencia, que dejan de ser tales cuando se ataca directamente en las cuestiones los puntos de verdadera dificultad.

Algo de esto es aplicable al trabajo publicado por el ilustrado profesor de la Escuela preparatoria de ingenieros Sr. Bentabol, que en pocas páginas ha hecho un resumen útil para los que deseen estudiar con fruto esta rama superior del Análisis, que se llama cálculo infinitesimal. Fíjense y defínanse con claridad los conceptos que juegan en una teoría ó en una ciencia, y con esto se habrá conseguido salvar gran número de obstáculos que de otro modo entorpecerían ó dificultarían el acceso hacia la verdad.

El opúsculo de que tratamos comienza por fijar el concepto de *cantidad* definido como *la cualidad de las cosas ó de sus propiedades, en virtud de la cual estas cosas ó sus propiedades son susceptibles de aumento ó disminución*. Se hace después la distinción entre el número y la cantidad, entre el modo continuo y discontinuo de variar ésta, sus afecciones opuestas, su representación simbólica ó por medio de números y definiendo después las *infinitamente crecientes* y las *infinitamente decrecientes*.

El capítulo II trata de los límites de las cantidades variables y los III, IV y V respectivamente de las relaciones entre las cantidades finitas, de las funciones en general y del límite de las funciones.

Las cantidades cuyas leyes de variación son objeto ya de la Aritmética, en reducido dominio, ya del Álgebra de un modo más extenso, ya de la teoría de las funciones en su acepción más general, se presentan en muy distintas circunstancias. Las fracciones $\frac{n}{n+N}$ ó $\frac{n+N}{n}$ en las que n es una cantidad constantemente creciente, convergen, como es sabido, hacia ese *límite finito*. Hay funciones, como

$$x=a+\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2}$$

que para $n=0, 1, 2,...$ crecen ó decrecen alternativamente. Y en este caso se obtiene

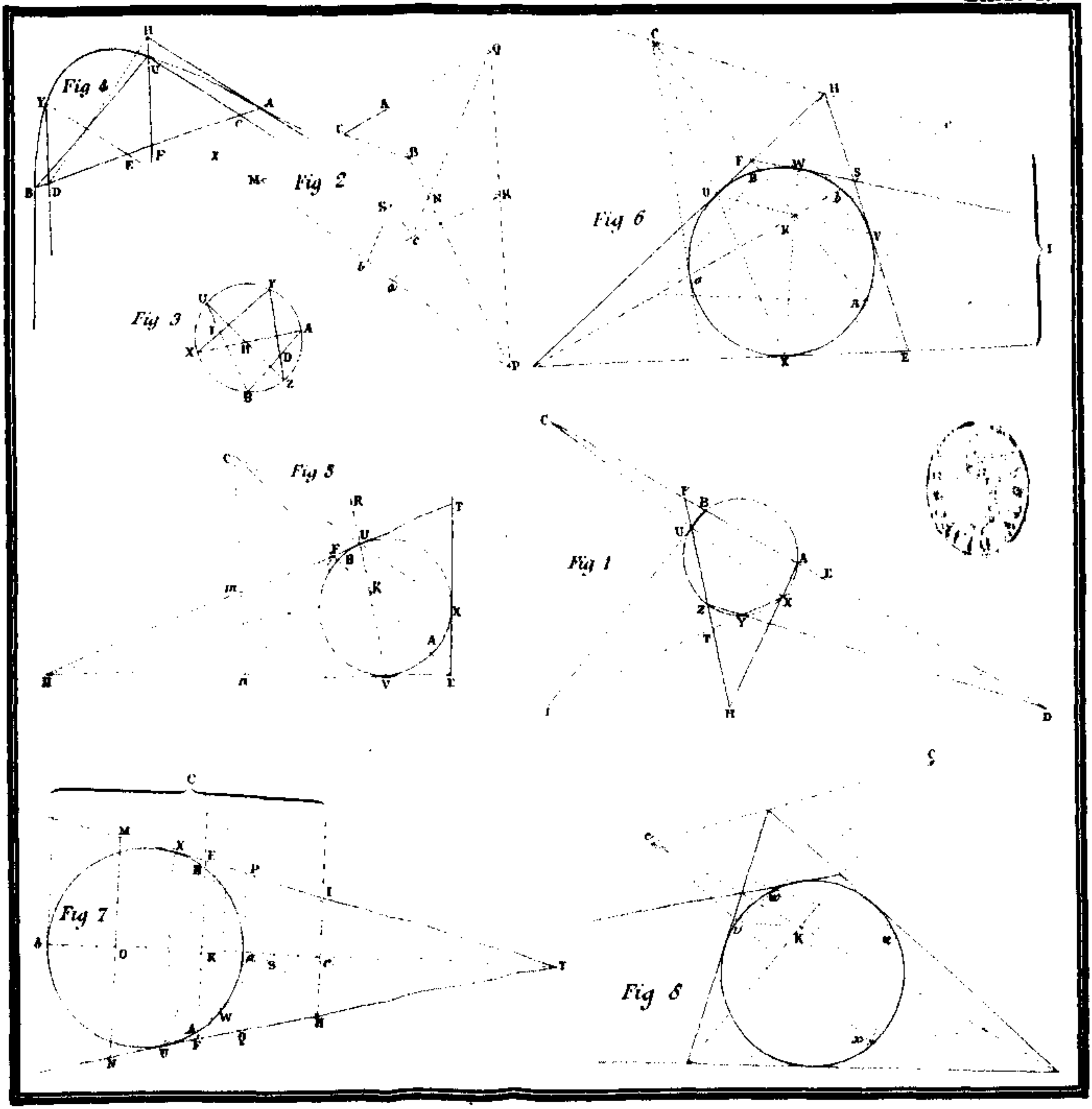
Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8

$$a+1,\ a,\ a-\frac{1}{4},\ a,\ a+\frac{1}{16},\ a, \ldots$$

Es de suma importancia la distinción entre las cantidades que acrecen ó decrecen constantemente hacia un límite finito, y las infinitamente crecientes que no tienen límite, así como las infinitamente decrecientes, cuyo límite es cero.

La clasificación de las funciones, su representación geométrica, las indicaciones relativas al *intervalo* y la *oscilación*, al *contorno* y á la *región*, al concepto de *parámetro* á la *periodicidad*, las circunstancias especiales que ofrece en ciertos casos el límite, los principios fundamentales del cálculo infinitesimal acerca de la sustitución de variables infinitesimales en las relaciones y en las sumas, son las cuestiones tratadas en sus puntos esenciales por el Sr. Bentabol, que ha reunido en pocas páginas cuanto puede servir al alumno como de preparación para después de iniciarse en estos conceptos capitales, poder abordar de un modo ventajoso el estudio de la ciencia de los infinitos.

Z. G. de G.

La Biblioteca del Instituto y observatorio de Marina de San Fernando

El Arte y la Ciencia son dos poderes que de muy diverso modo, en circunstancias muy variables y con ciertas alternativas, han ejercido su influencia avasalladora sobre la humanidad. El primero tiene su origen en el sentimiento y modela el mundo, según él mismo, iluminado por el genio. La Ciencia, más tardía en sus procesos, más oculta á las intuiciones del espíritu, solo se revela al hombre después de penosos esfuerzos, de multiplicadas tentativas, y como el Arte nace en expontaneidad, la Ciencia tiene su origen en la reflexión.

El Arte brilla en un momento y esparce su luz vivísima por todo el mundo, y sus resplandores bastan para iluminar épocas enteras de la vida de la humanidad. La Ciencia, oculta en un principio á las miradas de la inteligencia, tarda en aparecer, pero cuando ha surgido del caos que la contenía informe, se fija de una manera permanente, sus verdades dejan honda é indestructible huella, y solo consiente que sobre aquellos primeros surcos de las ideas que fijan las primeras etapas de su existencia, se tracen otros nuevos, que determinen el tejido cada vez más compacto de la verdad en sus diversas manifestaciones, en toda la serie infinita de sus accidentes, que ofrecen su variedad distribuída bajo las dos formas generales de principios y consecuencias, constitutivas del encadenamiento científico.

En el cielo del Arte, como en el de la Ciencia, hay astros de diversas magnitudes que iluminan la vida del sentimiento ó de la idea. El Arte cuenta con genios que han idealizado é idealizarán siempre la belleza en sus múltiples manifestaciones, poesía, música, pintura, escultura, etc. La Ciencia ha encontrado y encontrará genios que descubran sus secretos.

Pero no tratamos ahora de citar estas evoluciones progresivas que la Ciencia y el Arte cuentan en su desarrollo á través del tiempo y del espacio, pues fuera de que este asunto se presta á vastísimo desarrollo que nos alejaría de nuestro propósito, las ligeras consideraciones que preceden bastan por sí solas para formar en el espíritu la noción de los inmensos tesoros que el pensamiento humano ha depositado en sus obras, que reunidas por la asiduidad y el cuidado de generaciones varias, forman esos elementos de la educación nacional que se llaman bibliotecas.

Y no vamos á recorrer algunas de justa fama, de universal renombre, donde la inteligencia, ávida de conocer, encuentra material abundante en que saciar sus legítimas aspiraciones: vamos únicamente á citar la biblioteca del Instituto y Observario de Marina de San Fernando, que puede ofrecerse como testimonio elocuente de que en España se sigue la corriente del progreso matemático con noble entusiasmo y constancia meritoria, de que hay quien la sigue con interés y prepara los medios necesarios para que un día no sea difícil ver en este país clásico de la literatura equilibrado el progreso literario con el progreso científico, tan esencial en la vida moderna.

Causa verdadero placer á todo entusiasta por los adelantos de la ciencia, el ver reunidas las obras de los grandes maestros, de los genios innovadores, con las de los que han contribuído á explanar, esclarecer y desarrollar los pensamientos originales de aquéllos, con las obras de propaganda ó destinadas á la divulgación de las ideas por medio de la enseñanza.

El contemplar las cónicas de Apolonio, hoy espaciadas en el vasto plan que comprende el estudio de estas curvas y otras muchas junto á la obra magistral de Descartes, que produjo una verdadera revolución en la ciencia, á las célebres colecciones matemáticas de Pappus, que sirven de enlace entre la antigüedad y los tiempos modernos. El poder cotejar las obras de Arquímedes y Diofanto y Euclides, expresión de la cultura científica de los griegos con las obras geométricas de Gregorius á St Vincentio, Simson y Clairaut, el resultar fácil la investigación de la historia de la Matemática en los modelos que ofrecen las obras clásicas de las mas variadas épocas, y descubrir el sello característico que han impreso en esta ciencia los matemáticos de las diversas naciones, además de ser tarea grata para quien se interesa por conocer esta rama del saber, es ciertamente factible para quien puede explorar las riquezas atesoradas en la biblioteca del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando.

Las obras de Argand, Warren, Mourey, Faure y Scheffler, expresan lo fundamental que hay en las representaciones gráficas hoy empleadas universalmente por los expositores del Álgebra ó del Análisis matemático. Las obras de Gauss, de Legendre y Lejeune Dirichlet, los tratados de Barlow y Le Besgue sobre la teoría de los números, el original tratado de Grassmann, las obras de Hámilton y los propagandistas de su nueva teoría de los cuaternios Tait y Kelland, las de Clifford, tan entusiasta por esta nueva Geometría como por las singulares concepciones del hiper-espacio y del Algebra simbólica, ó en fin, por cuantos problemas hoy estimulan la actividad de los que cultivan la ciencia contemporánea. Carnot, que sigue una especial dirección en los dominios del Análisis geométrico, los clásicos libros de Newton, L'Hospital, Mac-Laurin y Euler sobre el cálculo infinitesimal, contiguos á los importantes tratados de Jacobi y Riemann. Las lecciones de cálculo diferencial é integral del abate Moignó, propagandista de las teorías de Cauchy, la «Theorie der Potenzial order cyklisch-hiperbolischen Functionen» y «Theorie der modular Functionen und der Modular Integrale de Gudermann», las obras de Boole, Lamé, Hermite, Briot, Bertrand, Cayley, Jordan y otras que sintetizan los últimos adelantos del Análisis; las numerosas obras que expresan la evolución de la ciencia astronómica desde Aristarco, Firmicus y Ptolomeo, desde Cassini, Galileo, Huyghens y Kepler hasta Laplace, y cuanto de reciente expresa esa grandiosa extensión que ha alcanzado en nuestros tiempos la idea del universo.

Todo esto y mucho que pudiera agregarse á lo expuesto, si á detallar se fuera lo mucho y bueno que el aficionado á los estudios matemáticos encuentra reunido en la Biblioteca de San Fernando; y al meditar acerca de estos y otros esfuerzos aislados que realizan en España los entusiastas por estas ciencias, hoy con tanto éxito cultivadas en las naciones más privilegiadas, cabe el abrigar la esperanza de que algún día, cuando una iniciativa superior encauce por su verdadero camino las ciencias positivas, sea posible á los talentos que hoy siguen otras direcciones contribuir al progreso de aquéllas, á explotar las riquezas científicas, que hoy permanecen latentes, sin hacer efectiva la virtualidad que poseen.

VARIEDADES.

Essai sur la Géométrie de la régle et de l'équerre, par G. de Longchamps. Paris-Libr. de Delagrave, 1890.—Esta obra, debida á la fecunda pluma de Mr. Longchamps, se halla destinada, sin género de duda, á tener un éxito completo entre los aficionados á la Geometría pura que cultivaron Euclides, Apolonio, Pascal y Desargues, y que se revela por la elegante sencillez de sus construcciones, efectuadas tan solo con el auxilio de la regla y de la escuadra; y hallándose inspirada en los notables trabajos del sabio geómetra y oficial de artillería Servois, además de ser útil para el agrimensor, es indispensable para el que sigue los progresos del arte de la guerra, por cuanto da soluciones sencillísimas y rápidas de muchos problemas practicables sobre el terreno.

Mereciendo esta obra un examen detenido que ponga de relieve algo de lo mucho notable en ella contenido, tanto desde el punto de vista de los conceptos teóricos sobre que se funda, como de las múltiples aplicaciones, será necesario insistir más adelante en un analisis que siquiera sirva al lector para formarse una idea aproximada de tan interesante trabajo.

Bastará indicar por ahora que, partiendo de la teoría de las transversales, llega el autor al trazado de las cónicas mediante la regla y la escuadra, así como al de la cisoide, la estrofoide, etc.

En la 2.ª parte se resuelven multitud de problemas sobre figuras inaccesibles, otros, como el establecimiento del fuerte y del tiro central, de un camino de seguridad, etc.

Zaragoza.—Establecimiento tipográfico de Julián Sanz.