Año I Zaragoza 20 de Junio de 1891 Núm. 6.º

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

EXTENSIÓN DE UN TEOREMA DE JACOBI

POR EL SR. GOMES TEIXEIRA, DE OPORTO

(Extracto de una carta dirigida á M. Lerch)

Supónganse dadas las funciones

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots . x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots . x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots . x_n) \end{cases}$$

Usted conoce bien este importante teorema de Jacobi:

Si las funciones $y_1, y_2, \ldots . y_n$ admiten derivadas parciales, relativas á $x_1, x_2, \ldots . x_n$ que sean funciones continuas de $x_1, x_2, \ldots . x_n$, es condición necesaria y suficiente para que una de ellas sea función de las demás que sea idénticamente nulo el determinante:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots . & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Mi objeto es hacer ver que puede enunciarse este teorema de la manera más completa siguiente:

Sea $a_1, a_2, \ldots ., a_n$ un sistema de valores de $x_1, x_2, \ldots ., x_n$, y $b_1, b_2, \ldots ., b_n$ los valores correspondientes de $y_1, y_2, \ldots . y_n$, y supongamos que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admiten derivadas parciales relativas á $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en las proximidades del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y que estas derivadas son funciones continuas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1.° Si una de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (y_1 por ejemplo), es función de las demás ($y_2, y_3, \ldots, y_n$), y esta función admite derivadas parciales relativas á $y_2, y_3, \ldots, y_n$ continuas en las proximidades del punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, el determinante (2) es nulo en las proximidades del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2.° Si el determinante (2) es nulo en las proximidades del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y si uno de los determinantes menores de primer orden no es nulo en este punto, una de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (y_1 por ejemplo) es una función de las demás en las proximidades del punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, y esta función es continua y admite derivadas parciales relativas á $y_2, y_3, \ldots, y_n$ en el punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

3.° Si el determinante (2) y los determinantes menores de primer orden son nulos en las proximidades del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y si uno de los determinantes menores de segundo orden no es nulo en este punto, dos de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son funciones de las demás en las proximidades del punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, y estas funciones son continuas y admiten derivadas parciales en este punto.

4.° En general, si el determinante (2) y los determinantes menores de orden igual ó inferior á i son nulos en las proximidades del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y si uno de los determinantes menores de de orden $i+1$ no es nulo en este punto, i de las funciones $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son funciones de las demás en las proximidades del punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, y estas funciones son continuas y admiten derivadas parciales en el punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

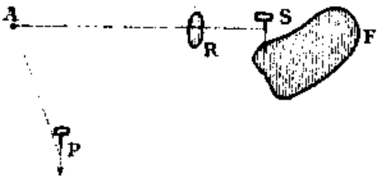
Para demostrar esta proposición, voy á considerar solamente las tres ecuaciones:

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases}$$

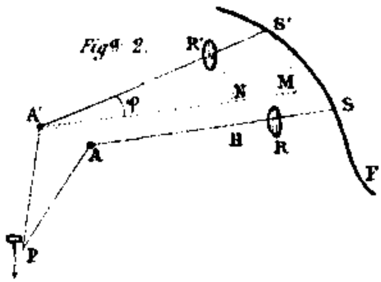
Es fácil ver que, en el caso general, se demuestra el teorema de la misma manera.

Usted bien sabe que, para establecer la primera parte del teorema mencionado se hace $y_1 = \varphi(y_2, y_3)$, se deriva relativamente á x_1, x_2, x_3 esta ecuación y se elimina $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}$ entre las tres ecuaciones resultantes.

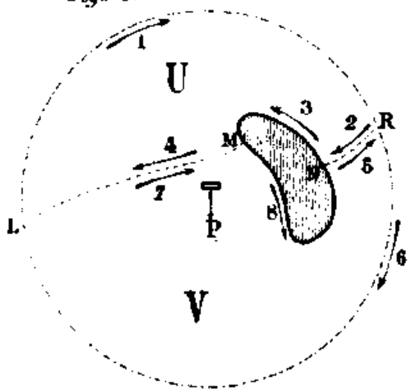
Figª 1.



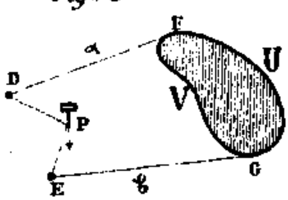
Figª 2.



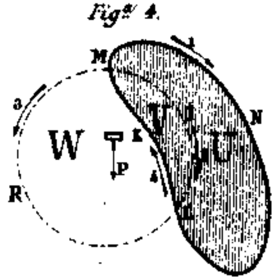
Figª 5.



Figª 3



Figª 4.



Ahora paso á las otras partes del teorema.

Supongamos que el determinante

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

es nulo en las proximidades del punto (a_1, a_2, a_3), y que uno de los determinantes menores de primer orden no es nulo en el punto $(a_1, a_2, a_3,)$, por ejemplo, el determinante

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

En virtud de un teorema muy conocido (Jordan, *Cours d'Analyse*, tomo III, pág. 585), la segunda y la tercera de las ecuaciones (3) determinan x_2 y x_3 como funciones de x_1, y_2 é y_3 en las proximidades del punto $(a_1, a_2, a_3, b_2, b_3)$, y estas funciones admiten en este punto derivadas parciales relativas á x_1, y_2, y_3 dadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0$$

. . . .

Si se sustituyen ahora los valores de x_2 y de x_3 en la primera de las ecuaciones (3), se obtiene el resultado

$$y_1 = \varphi(x_1, y_2, y_3),$$

que tiene lugar en las proximidades del punto (a_1, b_1, b_2, b_3).

Observando ahora que el teorema relativo á la derivación de las funciones compuestas es aplicable á la primera de las ecuaciones (3) se ve que y_1 admite derivadas parciales relativas á x_1, y_2 é y_3.

La derivada relativa á x_1 está dada por la ecuación

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1},$$

que, sustituyendo $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ por sus valores obtenidos de las ecuaciones anteriores, da

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{D}{D_1},$$

representando por D el determinante (4) y por D_1 el determinante (5).

Como el segundo miembro de esta ecuación es nulo en las proximidades del punto (a_1, a_2, a_3), tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = 0,$$

y por consiguiente, en las proximidades del punto (a_1, a_2, a_3), la función φ no depende de x_1. Tenemos, pues,

$$y_1 = \varphi(y_2, y_3),$$

y la segunda parte del teorema queda demostrada.

Supongamos ahora que todos los determinantes menores de primer orden sean nulos en las proximidades del punto (a_1, a_2, a_3); y sea $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ uno de los determinantes menores de tercer orden que no es nulo en el punto considerado.

En virtud del teorema ya empleado en el caso anterior, la tercera de las ecuaciones (3) determina x_3 en función de x_1, x_2, x_3, y las derivadas parciales de x_3 relativamente á x_1 y x_2 se hallan dadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

Si se sustituye ahora el valor de x_3 en la primera de las ecuaciones (3), se obtiene el resultado

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2, y_3),$$

y tenemos, como en el caso anterior,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2},$$

ó, eliminando

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \quad y \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$$

por medio de las ecuaciones anteriores,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial f_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}}.$$

Como los segundos miembros de estas igualdades son nulos en las proximidades del punto (a_1, a_2, a_3), la función φ no contiene ni x_1 ni x_2, y tenemos

$$y_1=\varphi(y_3).$$

La segunda de las ecuaciones (3) da de igual manera

$$y_2=\psi(y_3).$$

El teorema queda, pues, demostrado.

IMPORTANCIA DE LAS FORMAS CONGÉNERES EN LA MATEMÁTICA

POR

D. LAURO CLARIANA Y RICART

(CONTINUACIÓN)

"Séanos permitido apuntar algunas ideas."

Con dificultad podemos estudiar directamente una forma matemática, sea en sentido analítico ó geométrico, si no asociamos á la idea primitiva otra congénere, la cual si bien nos favorece por un lado, en muchos casos dicha asociación no es bastante estrecha para que dejemos de quedar perjudicados en la consecución del fin.

De la ligereza de éste procedimiento responde la voz de algun matemático autorizado, cuando manifiesta que no siempre se estudian las figuras referidas al sistema de coordenadas que pudiéramos llamar naturales. Estos descuidos son más notables cuando se eleva la ciencia á la altura del cálculo infinitesimal.

En la diferencial de un área correspondiente á una figura geométrica cualquiera, se prescinde generalmente del modo de ser de dicha figura, asociándola á ejes cartesianos ó polares, como si éstos en todos los casos fuesen los seres mas afines á la forma primitiva considerada.

Nos concretaremos á simples ejemplos para dar á comprender la fuerza de nuestros argumentos.

Al considerar el círculo relacionado á ejes rectangulares, hay necesidad de desarrollar la integral

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

á fin de determinar su área; esta integral sin duda no debe considerarse como la más natural, porque la faja formada por dos paralelas al eje y de las indefinidamente próximas, y que expresan la diferencial del círculo, es una forma que no es congénere con la primitiva. Si tomamos luego coordenadas polares en el supuesto de que el centro del círculo sea el polo, entonces dicho círculo se halla expresado por la integral

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$$

correspondiente al límite de una suma de sectores, siendo estos elementos ya más afines á la figura de que se trata. Cabe, no obstante, afirmar, que aun existe otra figura que lo es más; ésto es, el círculo concéntrico al primero y cuya distancia al mismo es una cantidad indefinidamente pequeña. En éste caso la diferencial debe expresarse por $2\pi r . dr$, y la integral resulta ser

$$\int_0^r 2\pi r . dr = \pi r^2$$

Este cálculo es más sencillo y natural por haber asociado á la primera figura la más congénere.

Dichas consideraciones facilitan el paso á la Geometría del espacio, pues tomando la esfera, por razones análogas á las que preceden, podremos sentar como principio que la forma natural ó congénere para expresar la diferencial de su volumen será el volumen comprendido entre dos, esferas concéntricas indefinidamente próximas, cuya expresión es $4\pi r^2 . dr$; de suerte que integrando entre los límites o y r, nos dará el volumen de la esfera; en efecto

$$\int_0^r 4\pi r^2 .\, dr = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Ahora bien, cuando se pierde la curvatura regular y uniforme que caracteriza á la circunferencia y á la esfera, se aumenta la dificultad, empero facilmente se concibe por lo que precede, que la forma con-género á la dada debe ser homotética á ésta, tanto si la figura primitiva es poligonal como curvilínea, pues para este último caso basta considerar el límite de una figura poligonal.

Concretándonos pues á la figura poligonal, debemos recordar que la proyección perspectiva puede responder de la teoría de homotecia, comprendiendo dicha proyección como caso particular el caso de ser los rayos paralelos, base de la igualdad de figuras. Estas dos proyecciones son suficientes para formar la base segura y única de toda la geometría, y por ende el zócalo de las cuestiones más árduas del cálculo infinitesimal.

En suma, las consideraciones anteriores, nos permiten considerar tan solo un elemento rectilíneo de polígono referido á su centro de homotecia, segun que dicho punto sea propio ó impropio, resultando un triángulo ó un rectángulo, si limitamos, en este segundo caso, la faja en la forma más conveniente, cuando el vértice del primer triángulo se aleja indefinidamente de la base. De esta suerte las figuras congéneres á las primeras deben ser fajitas paralelas á bases respectivas del triángulo ó rectángulo, y en el supuesto de expresar sus diferenciales.

La forma rectangular no es indispensable en la teoría de figuras congéneres, pues bastará considerar el triángulo para la determinación de un área cualquiera. No obstante la tenemos en cuenta, como tránsito para la forma triangular, pues mientras en el rectángulo deben suponerse variables los dos constitutivos del área diferencial, en el triángulo deben imponerse variables los dos constitutivos del área diferencial.

Las diferenciales de áreas, en los dos casos supuestos, estarán expresadas respectivamente por:

$$\frac{b+b'}{3}\, d\,a\,,\quad b_1\, d\,a_1;$$

llamando b y b' las dos bases de la fajita correspondiente al triángulo, y a su altura, b_1 y a_1 la base y altura del rectángulo. La primera diferencial puede expresarse por

$$\frac{b+b-d\,b}{2}\, da = b\, da - \frac{d\,b.\,da}{2}.$$

Así pues, el área total del triángulo será:

$$b\int_o^a d\,a - \int_o^b\int_o^a \frac{d\,b\,.\,d\,a}{2} = b\,a - \frac{b\,a}{2} = \frac{b\,a}{2}.$$

En cuanto á la segunda diferencial; $b_1 \, d\, a_1$, nos dá:

$$\int_o^{a} b_1 \, d\, a_1 = b_1 \, a_1;$$

área del rectágulo.

Estas consideraciones son suficientes para llevarlas al área de un polígono cualquiera, empero si se trata de una figura regular, entonces puede tomarse como cento de homotecia el mismo centro de figura, apareciendo mejor en este caso la analogía con las figuras congéneres del círculo, pudiendo continuar aún dicha semejanza para los poliedros regulares.

(Se concluirá)

LOS PROGRESOS DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO EN 1890

POR M. E. VIGARIÉ

(Continuación)

En fin, M. Catalán resuelve el problema siguiente:

Las rectas AM, BM, CM *encuentran en* U, V, W *á los lados* BC, CA, AB *del triángulo* ABC. *Determinar:* 1.º *las longitudes* x, y, z *de las rectas* AU, BV, CW; 2.º *las distancias* AM $=u$, BM $=v$, CM $=w$.

M. Catalán, después de haber hecho BU $=a'$, CU $=a''$, ... obtiene

$$x^2 = \frac{c^2a'' + b^2a' - aa'a''}{a},$$

con expresiones análogas para y^2 y z^2; además

$$\frac{u}{\operatorname{sen}\beta''} = \frac{v}{\operatorname{sen}\alpha'} = \frac{w}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta'')},$$

$$v = \frac{ab''x}{ab'' + a'b'} \qquad v = \frac{bc''y}{bc'' + b'c} \qquad w = \frac{ca''z}{ca'' + c'a'},$$

designando α', α'', β', β'', γ', γ'' *respectivamente las longitudes* AW, AV, BU, BW, CV, CU.

Debemos también consignar otras Memorias, debidas á M. A. Müller, é insertas en los Archivos de Grunert-Hoppe (1890):

1.º *Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die denselben verwandten Kegelschnittschaaren* (26 páginas).

2.º *Ueber Kegelschnitte die zu dem verallgemeinerten Brocard'schen Dreiecke in Beziehung stehen* (44 páginas).

4. Focos de Steiner. MM. Neuberg y Gob (*sur les foyers de Steiner d'un triangle*, A. F., París, 1889, pp. 179-196) llaman *focos de Steiner*, en un triángulo, á los focos de la elipse que toca á los lados en sus puntos medios. Han expuesto de estos puntos un considerable número de propiedades, de las cuales las principales son las siguientes:

1.º Si se transforma un triángulo por polares recíprocas, tomando como centro del círculo director el punto de Lemoine K, este punto será un foco del triángulo transformado (proposición debida á M. Hadamard. *Journal de math. spéciales*, 1885, pág. 41).

2.º Si F es un foco de una cónica que toca á los lados del triángulo ABC en los puntos A', B', C' las rectas FA', FB', FC' serán las isogonales de las rectas FA, FB, FC con relación á los ángulos BFC, CFA, AFB. Luego, si F es un foco de Steiner del triángulo ABC, las rectas AF, BF, CF serán las simedianas de los triángulos BFC, CFA, AFB.

3.º Los focos de Steiner de un triángulo son los puntos de Lemoine de sus triángulos podares.

4.º El centro de gravedad G de un triángulo es un foco de Steiner de su triángulo podar.

5.º Las rectas que unen los vértices de un triángulo á un foco de Steiner son inversamente proporcionales á los senos de los ángulos bajo los cuales se ven desde este foco los lados opuestos de ABC.

6.º Siendo K el punto de Lemoine de un triángulo ABC y O, O_a, O_b, O_c, los centros de los círculos circunscritos á los triángulos ABC, KBC, KCA, KAB, los puntos O y K son los focos de Steiner del triángulo $O_aO_bO_c$. Los cuadriláteros OBO_aC, OCO_bA, OAO_cB son equivalentes.

7.º Sean K_1, A' los puntos de intersección de la simediana AK con las circunferencias ABC, KBC; K_1 es un foco de Steiner del triángulo A'BC.

8.º Siendo H el ortocentro del triángulo ABC, tómense sobre HA, HB, HC las longitudes HA', HB', HC' iguales á las alturas correspondientes: H es un foco de Steiner del triángulo A'B'C'.

9.º Sea Ω el punto de Brocard de ABC tal, que $\Omega AB = \Omega BC = \Omega CA$. Trácense las rectas ΩM, ΩN, ΩP paralelas á BC, CA, AB y terminadas en M, N, P, en CA, AB, BC. Ω es un foco de Steiner de MNP.

10. El centro de gravedad de un triángulo ABC es un foco de Steiner del segundo triángulo de Brocard $A_2B_2C_2$.

11. Sean A′B′C′ el triángulo podar de ABC con relación al punto de Lemoine K, ω y ω' los ángulos de Brocard de los triángulos ABC, A′B′C′. El ángulo ω' depende únicamente de ω.

Los Sres. Neuberg y Gob han dado también varias proposiciones que se refieren á los *ángulos de Steiner*. Llaman así á las mitades de los ángulos, en los vértices, de dos triángulos isósceles equibrocadienses con el triángulo dado. El menor de estos ángulos es el *primer ángulo de Steiner*, el otro es el *segundo ángulo de Steiner*.

5. Ejes de Steiner é hipérbola de Kiepert. La recta que une los focos de Steiner y la que es perpendicular en el punto medio de la recta que une estos dos puntos, son los ejes de la elipse máxima inscrita al triángulo y también los de su anticomplementaria: la elipse de Steiner. Por este motivo los Sres. Neuberg y Gob *(Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert.* Asoc. Franç., París 1889, páginas 166-179), han llamado á estas rectas *ejes de Steiner*. Siendo los ejes de la hipérbola de Kiepert paralelos á los de Steiner, el estudio de estos últimos debía conducir á un estudio de la cónica de Kiepert; esto es lo que han hecho los Sres. Neuberg y Gob. Después de haber dado, para más claridad, nuevas demostraciones de proposiciones ya conocidas, los Sres. Neuberg y Gob han dado á conocer numerosas propiedades de los ejes de Steiner y de la hipérbola de Kiepert. Véanse las más importantes:

1.ª Los ejes de Steiner son las rectas que unen el centro de gravedad G á los puntos de intersección de la circunferencia que tiene por diámetro GH (siendo H el ortocentro) con la recta que une el punto de Lemoine K al punto medio de GH.

Si se reemplaza H por otro punto de la hipérbola de Kiepert, se tiene el teorema siguiente:

2.ª Una secante cualquiera, trazada por el centro Q, de la hipérbola de Kiepert, encuentra á los ejes de Steiner en dos puntos por los cuales se trazan paralelas á estos ejes; el punto de intersección de estas paralelas describe la hipérbola de Kiepert.

3.ª Sean m_a, m_b, m_c las intersecciones de los lados homólogos del triángulo complementario A′B′C′ y del triángulo ortocéntrico $h_ah_bh_c$ de un triángulo dado ABC. Por estos puntos se puede hacer pasar una infinidad de triángulos $p_ap_bp_c$ inscritos á ABC y perspectivos con ABC. El lugar de los centros de perspectiva es la hipérbola de Kiepert.

4.ª Los lados del triángulo $m_am_bm_c$ tocan á la hipérbola de Kiepert en A, B, C; *el ortocentro de* $m_a m_b m_c$ *coincide* con el centro del círculo de los nueve puntos de ABC; las rectas Am_a, Bm_b, Cm_c, son perpendiculares á GH.

5.ª Los ejes de Steiner son paralelos á las rectas de Simson de los extremos del diámetro OK de la circunferencia ABC.

6.ª Dadas dos elipses concéntricas y homotéticas, la normal en un punto M de la elipse interior corta á los ejes en los puntos P, Q, y la tangente en M encuentra á la elipse exterior en R, S. Los ángulos RPS, RQS *son constantes*.

7.ª El lugar de los centros de las cónicas circunscritas á un triángulo dado, y cuyos ejes tienen direcciones dadas, es una hipérbola equilátera transformada por puntos inversos y por puntos anticomplementarios, de un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

La proposición (6) da la noción generalizada del ángulo deSteiner.

6. Series de puntos notables. Si se combinan entre sí las coordenadas de uno ó de varios puntos del plano de un triángulo, se da origen á otros puntos que en general, poseen, con relación á los primeros, propiedades notables. Partiendo de aquí, M. Poulain *(Sur quelques series de points remarquables dans le plan du triangle* Mathesis, pp. 246-251) ha resuelto los problemas siguientes:

1.º Dados dos puntos M_1 y M_2 en el plano del triángulo ABC, construir un tercer punto M_3 cuyas coordenadas baricéntricas sean iguales á los productos $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ de las coordenadas $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ de M_1 y M_2.

2.º Dados dos puntos en el plano de un triángulo ABC, construir un tercer punto cuyas coordenadas baricéntricas sean iguales á los cocientes de las coordenadas baricéntricas homólogas de los puntos dados.

Después de haber dado diversas construcciones de estos puntos y estudiado ciertos casos particulares, M. Poulain indica algunos puntos notables.

El punto cuyas coordenadas baricéntricas son $(\alpha a^n, \beta b^n, \gamma c^n)$ ó $(\alpha \operatorname{sen}^n A, \beta \operatorname{sen}^n B, \gamma \operatorname{sen}^n C)$, siendo α, β, γ las de un punto dado M, es el *sinusien de orden* n de M. Inversamente, este último es el *antisinusien* del primero, ó su *sinusien* de orden $(-n)$. Si el seno se halla reemplazado por el coseno ó por la tangente, se tiene el *cosenusien* ó el *tangentien* [1] M da origen á tres series de puntos.

[1] Transcribimos sin variar estas nuevas denominaciones. *N. del T.*

Si se multiplican los ángulos por 2 ó $\frac{1}{2}$, 4 ó $\frac{1}{4}$, etc...., se tienen nuevas series que en el caso de los senos pueden llamarse *doble sinusien* y el *semi-sinusien*, etc.

Terminando, M. Poulain da una construcción de estos puntos; después indica ciertas particularidades que se presentan en este trazado.

7. Círculo de los nueve puntos. Dos demostraciones (*) del teorema de Feuerbach se han dado. La una, debida á M. Milne, fué comunicada por M. Lalbalettrier (J. E. 1890, pp. 3-5); M. Lauvernay indicó la otra (J. E. 1890, pp. 193-195). Estas demostraciones son notables por su gran sencillez.

8. Círculo de Fuhrmann. Este círculo es el que tiene por diámetro la recta que une el ortocentro H al punto de Nagel ν. Ha sido estudiado por M. Fuhrmann (*Sur un nouveau cercle associé à un triangle* M. 1890, pp. 105-111).

Si A'B'C' y A"B"C" son triángulos complementarios y anticomplementarios de ABC: A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3, los puntos en que el círculo circunscrito ABC corta á las bisectrices AI, BI, CI, y á las rectas que unen entre sí los centros I_a, I_b, I_c de los círculos ex inscritos, se tienen las propiedades siguientes:

1.ª Sean A_2, B_2, C_2, los simétricos de A_1, B_1, C_1 con relación á BC, CA, AB. El triángulo $A_2B_2C_2$ se halla inscrito al círculo de Fuhrmann y es simétricamente semejante á los triángulos ABC ó $I_aI_bI_c$.

2.ª Se toman sobre las alturas AH, BH, CH del triángulo ABC los segmentos AA_1, BB_1, CC_1 iguales al diámetro $2r$ del círculo inscrito. El triángulo $A_1B_1C_1$ se halla inscrito al círculo de Fuhrmann; además es simétricamente semejante á ABC.

3.ª I es el centro de perspectiva de los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_1B_1C_1$.

4.ª I es el punto doble de los triángulos simétricamente semejantes ABC, $A_1B_1C_1$ y también el de los triángulos $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$.

5.ª Sean I'_a, I'_b, I'_c los simétricos de I_a, I_b, I_c, repectivamente con relación á las rectas BC, CA, AB. Las circunferencias circunscritas á los triángulos BCI'_a, CAI'_b, ABI'_c y las rectas AI'_a,

(*) M. Clemente Thiry ha dado una (*Mathesis*, 1886, p. 106) que ha sido reproducida por M. Catalán, que la había obtenido por su parte en la Nota titulada: *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes.*

BI'_a, CI'_c, pasan por un mismo punto R. Los lados del triángulo $A_2B_2C_2$ son perpendiculares en los puntos medios de las rectas AR, BR, CR. I y R son puntos gemelos.

6.ª El eje de homología de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ es perpendicular en el punto medio de la recta IR y toca, en este punto, al círculo inscrito á ABC.

7.ª El círculo inscrito á ABC y el círculo de los nueve puntos se tocan en el punto medio de la recta IR.

8.ª Las rectas A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1 encuentran respectivamente á BC, CA, AB en tres puntos V_a, V_b, V_c situados en la tangente común al círculo inscrito y al círculo de los nueve puntos.

9.ª Las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1, C_1 sobre los lados opuestos del triángulo $A_2B_2C_2$ concurren en un punto S de la circunferencia O. Este punto se halla situado en la recta Oν y es, en el triángulo ABC, la homóloga del punto ν considerado en el triángulo $A_1B_1C_1$.

10. Las perpendiculares bajadas desde A, B, C sobre los lados opuestos del triángulo $A_1B_1C_1$ concurren en un mismo punto T de la circunferencia O; T y H son puntos homólogos de los triángulos ABC, $A_1B_1C_1$.

11. El eje de homología de los triángulos ABC, $A_1B_1C_1$ es perpendicular á HT.

12. Las rectas dobles de los triángulos inversamente semejantes ABC, $A_1B_1C_1$ encuentran á las alturas AH, BH, CH de ABC en puntos (X_a, X_b, X_c), (X'_a, X'_b, X'_c), tales, que se tenga

$$AX_a = BX_b = CX_c = R - d, \quad AX'_a = BX'_b = CX'_c = R + d,$$

siendo d la distancia OI.

Mathesis publicará ulteriormente, investigaciones de M. Mansión que forman un complemento al artículo de M. Fuhrmann.

9. Parábolas de Artzt. Estas parábolas forman dos grupos: son confocales dos á dos, y tienen por focos los vértices A_2, B_2, C_2 del segundo triángulo de Brocard.

El primer grupo (P) contiene las parábolas P_a, P_b, P_c tangentes á los lados del triángulo en los extremos del tercero.

El segundo grupo (Q) contiene las parábolas tangentes á las dos bisectrices de un ángulo y á las medianas correspondientes.

Las parábolas (P) han sido consideradas recientemente por M. de Longchamps.

Después de haber dado una demostración elemental (J. E. 150-151) de la fórmula que da el parámetro de estas curvas M. de Longchamps ha dado á conocer, *(Sur les paraboles de Artzt,* J. S, 1890, pp. 149-153) propiedad siguiente:

Si A', B', C' son los puntos comunes á P_b y P_c, P_c y P_a, P_a y P_b, las tangentes en A' á P_b y P_c son respectivamente paralelas á las medianas trazadas por C y B. De lo que resulta este teorema: Las parábolas (P) se cortan en los puntos A', B', C'; las áreas de los triángulos curvilíneos que determinan están dadas por las fórmulas:

$$\mathrm{AC'B'} = \mathrm{CA'B'} = \dot{\mathrm{B}}\mathrm{A'C'} = \frac{17}{81}\mathrm{ABC}, \quad \mathrm{AC'B} = \mathrm{BA'C} = \mathrm{CB'A} = \frac{5}{81}\mathrm{ABC}.$$

En esta nota M. de Longchamps da á conocer también cierta elipse U cuya ecuación baricéntrica es:

$$8\Sigma\alpha^2 = 11\Sigma\alpha\beta,$$

y enuncia con este motivo el teorema siguiente:

1.º *La elipse* U *tiene por centro el centro de gravedad* G *del triángulo.* 2.º *Pasa por los puntos* A', B', C' *(centros de gravedad de los triángulos* AGB, BGC, CGA) *comunes á las parábolas* (P). 3.º *Los semi-ejes* α, β *de esta elipse se hallan dados por las fórmulas*

$$\alpha\beta = \frac{8 \text{ área ABC}}{27\sqrt{3}}, \quad \alpha^2+\beta^2 = \frac{2\,(a^2+b^2+c^2)}{81}.$$

(Se concluirá)

MÉMOIRE SUR LE TÉTRAEDRE, SUR LE POINT DE STEINER

PAR M. NEUBERG

Ya en el número 4.º expusimos algunas nociones sobre la Geometría reciente, extractadas de la obra que publicó el profesor Casey, con objeto de poner al corriente á nuestros lectores en lo que se continúa haciendo concerniente á este género de investigaciones.

Basta recorrer el artículo que acaba de publicar M. Vigarié en el *Journal de Mathématiques élémentaires* sobre *los progresos de la Geometría del triángulo en* 1890 (del cual continuamos publicando una traducción en este número del periódico), para convencerse de cuán vasto es ya el campo por el que se extiende esta rama geométrica, y cuán necesario es reunir todo lo ya establecido en una obra completa, y de una manera sistemática. Efectivamente, en este trabajo que enumera y resume lo más reciente de tales investigaciones, se trata de los *puntos asociados tripolarmente*, de los *puntos gemelos*, de las *coordenadas de inercia* de M. Cesàro y del trabajo del mismo sobre las *coordenadas baricéntricas*. Acerca de las *figuras semejantes*, del *círculo* de *Fuhrmann*, de las *parábolas de Artzt* y de *Mandart*, etc., todo lo cual exigiría recorrer las páginas de los periódicos matemáticos de MM. Longchamps y Mansion, donde se hallan diseminados estos resultados que constituyen la Geometría reciente.

Con objeto de facilitar este estudio, hoy hemos de limitarnos á extractar algunas ideas de M. Neuberg que encaminadas á este fin, permiten ilustrar al lector en lo más esencial de tales investigaciones. En su *Mémoire sur le tétraèdre* (*) se propone extender al espacio las proposiciones concernientes á los puntos de Lemoine y de Brocard.

Como preliminar necesario enuncia desde luego las proposiciones capitales de la nueva Geometría, de las cuales algunas hemos publicado en el anterior número de este periódico, y que M. Neuberg comprende bajo el epígrafe de *puntos y círculos de Lemoine y de Brocard.*

Después pasa á exponer las *transformaciones arguesianas*. Con este objeto pasa del examen de las coordenadas *normales* y *baricéntricas* de un punto M con relación á un *triángulo*, á las mismas con relación á un *tetraedro*.

Definidas las *coordenadas baricéntricas* de un punto M con relación al tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ por la proporción

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 = T_1\delta_1 : T_2\delta_2 : T\delta : T_3\delta_3 : T_4\delta_4 ,$$

en la que μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 son proporcionales á los volúmenes $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_1$, etc. δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 son proporcionales á las distancias de M á las caras del tetraedro, y T_1, T_2, T_3, T_4 son las áreas de las caras de éste, define el plano de homología de los tetraedros $A_1A_2A_3A_4$ y el $M_1M_2M_3M_4$, de los cuales el último está determinado por los puntos de encuentro de la intersección con cada cara de la recta trazada por M y por el vértice opuesto del primero y el *plano polar* de M con relación al tetraedro T.

Define dos puntos M y N como conjugados isogonales con relación à un triángulo cuando las coordenadas normales del uno son inversamente proporcionales á las del otro y lo son con relación al ángulo AOB, cuando éste y el ángulo MON tienen la misma bisectriz;

(*) Bruxelles. Mayer, imprimeur Rue de Louvain, 72 pág. 1884.

siendo ON la *polar isogonal* de M y formando los rayos OA, OB, OM, ON un *haz isogonal.*

Si M_a, M_b, N_a, N_b son las proyecciones de M y N sobre los lados del ángulo AOB, se tiene, como se vió en la página 77 de este periódico, que $MM_a \,.\, NN_a$ y $MM_b \,.\, NN_b$ son iguales, que M y N son los focos de una cónica tangente á OA y OB, que en un triángulo las proyecciones de dichos puntos sobre los lados son seis puntos de una circunferencia, etc. Y las mismas propiedades se verificarán para el triedro. Así, por ejemplo, las proyecciones de M y N sobre las tres caras de un triedro se hallan en una superficie esférica cuyo centro se encuentra en la recta MN, etc.

En cuanto al tetraedro, los planos polares isogonales de M con relación á los seis diedros concurren en un mismo punto N, las distancias de M á las caras del sólido son inversamente proporcionales á las de N á los mismos planos, las proyecciones de M y N sobre estos planos se hallan situadas en una superficie esférica cuyo centro está en el punto medio de MN y los puntos M, N son los focos de una superficie de segundo orden inscrita al tetraedro.

Además, la consideración de las proyecciones M_1, M_2, M_3, M_4 de M sobre las caras del tetraedro conduce al teorema de Steiner:

Si las perpendiculares trazadas por los vértices de un tetraedro $M_1M_2M_3M_4$ *sobre las caras homólogas de otro tetraedro* $A_1A_2A_3A_4$ *concurren en un punto, las perpendiculares trazadas desde los vértices de* $A_1A_2A_3A_4$ *sobre las caras de* $M_1M_2M_3M_4$ *también concurrirán en un punto,* teorema del que da M. Neuberg una generalización en su teoría de las *cuádruples hiperbolóidicas* ó sistemas de cuatro rectas tales, que cualquiera otra recta que encuentra tres rectas del sistema se apoya también en la cuarta, siendo estas rectas las generatrices de un mismo sistema de un hiperboloide.

Pasa M. Neuberg á examinar las superficies de segundo orden circunscritas al triángulo de referencia que permanecen invariables por una transformación isogonal, presentando las ecuaciones de las *analagmáticas isogonales é isotómicas,* lo que le permite enunciar la existencia de *tres hiperboloides analagmáticos representados por tres ecuaciones*

$$\delta_4\delta_1 \pm \delta_2\delta_3 = o, \quad \delta_4\delta_2 \pm \delta_1\delta_3 = o, \quad \delta_4\delta_3 \pm \delta_1\delta_2 = o.$$

En el artículo dedicado al *punto del mínimo de la suma de los cuadrados de las distancias á planos dados* se hallan extendidos varios teoremas relativos al caso del triángulo al caso del tetraedro, el punto L tal, que la suma de los cuadrados de sus distancias á las caras del tetraedro es un mínimo, es el punto K de Lemoine en el triángulo. El punto L y el G de gravedad del tetraedro son, como en la Geometría del triángulo, *conjugados isogonales*, y el L es el centro de gravedad del tetraedro $L_1L_2L_3L_4$ formado por sus proyecciones sobre las caras del tetraedro T.

Además, los planos trazados por L paralelamente á las caras $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_1$, $A_1A_1A_2$ determinan un paralelepípedo, cuya diagonal A_1L pasa por el centro de gravedad N del triángulo $N_1N_2N_3$ determinado por las intersecciones de cada uno de dichos planos paralelos con las aristas A_1A_1, A_1A_2, A_1A_3; y considerando las tres expresiones distintas del volumen del paralelepípedo, obtiene M. Neuberg las igualdades

$$A_1N_2N_3 \cdot T_1 = A_1N_3N_1 \cdot T_2 = A_1N_1N_2 \cdot T_3, \ (*)$$

que, á causa de la analogía con la relación (de igualdad de productos) que determinan dos rectas antiparalelas en un ángulo, le permiten dar á conocer los triángulos $A_1A_2A_3$ y $N_1N_2N_3$ bajo la denominación de *secciones antiparalelas de segunda especie en el triedro* A_1.

De análoga manera que para el triángulo, una esfera que pase por los tres puntos A_1, A_2, A_3 encuentra á las aristas A_1A_1, A_1A_2, A_1A_3 del tetraedro T en tres puntos N_1, N_2, N_3 tales que N_2N_3 y A_2A_3, etc. son antiparalelas, de manera que la sección $N_1N_2N_3$ es antiparalela á la $A_1A_2A_3$ con respecto al triedro A_1.

No seguiremos á M. Neuberg en la multitud de proposiciones que establece al tratar de las *cuádruples hiperbolóidicas* que le permiten generalizar el teorema de Steiner arriba citado, ni en las teorías de las *rectas concurrentes*, del tetraedro isodinámico (aquél en el cual los productos de las aristas opuestas son iguales), del *cuadrángulo isodinámico*, del *tetraedro isógono* y del *tetraedro involutivo* que constituyen su interesante trabajo sobre el tetraedro, pues el entrar en estos desarrollos nos llevaría más allá de nuestro propósito, limitado á indicar los puntos capitales de esta extensión que hace M. Neuberg al tetraedro de la Geometría del triángulo.

Poco diremos de la nota *Sur le point de Steiner* que fué publicada anteriormente en el *Journal de Mathématiques spéciales* (1886) pues, tanta es la doctrina contenida en un corto número de páginas, que sólo puede formarse idea de tan interesante trabajo, leyéndolo por completo.

(*) Las áreas T_1, T_2, T_3 de las caras $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ son proporcionales, como en la Geometría del triángulo, á las distancias del punto L á las caras del tetraedro.

Sin embargo, diremos únicamente que, siendo $A_1A_2A_3$ un triángulo cualquiera, O el centro del círculo circunscrito, G el centro de gravedad, H el punto de intersección de las alturas, E la elipse circunscrita, cuyo centro es G, el círculo O y la elipse E tienen un cuarto punto común R, del cual Steiner ha consignado las propiedades siguientes:

Los círculos osculadores á la elipse en los puntos A_1, A_2, A_3 *se cortan en* R.

La normal trazada por R *á la elipse pasa por el simétrico de* H *con relación á* G.

El punto R *pertenece á las tres circunferencias que pasan por un vértice del triángulo* $A_1A_2A_3$ *y por el simétrico de los otros vértices tomados con relación á* G.

Este punto es idéntico al que M. Tarry ha designado por la letra R, para el cual propone M. Neuberg la denominación de *punto de Steiner.*

Para obtener algunas propiedades del punto de Steiner hace uso M. Neuberg de la transformación por *polaridad trineal.*

Si $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=o$ es la ecuación de una recta n que encuentra á los lados del triángulo fundamental $A_1A_2A_3$ en N_1, N_2, N_3, los conjugados armónicos de las rectas A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 con relación á los ángulos A_1, A_2, A_3 del triángulo, tienen por ecuaciones $u_2x_2-u_3x_3=o$,.... y concurren en un punto N cuyas coordenadas son $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}$, estableciendo M. Neuberg con M. Mathieu (Nouv. Annales 1865) que N es el *polo trilineal* de n y que n es la *polar trilineal* de N.

Considerando enseguida M. Neuberg la ecuación de una cónica U circunscrita al triángulo de referencia $A_1A_2A_3$:

$$\frac{L_1}{x_1}+\frac{L_2}{x_2}+\frac{L_3}{x_3}=o,$$

observa que la polar trilineal de un punto cualquiera (x_1, x_2, x_3) de esta curva pasa por un punto fijo cuyas coordenadas son L_1, L_2, L_3; este punto fijo, al que llama *polo de homología* de U, es el centro de homología de $A_1A_2A_3$ y del triángulo $T_1T_2T_3$ formado por las tangentes en los puntos A_1, A_2, A_3 á la cónica.

Aplicando M. Neuberg las nociones establecidas al círculo O y á la elipse E, y suponiendo que $K_1K_2K_3$, $G_1G_2G_3$ son los triángulos polares de $A_1A_2A_3$ con relación á estas curvas, de que el polo de homología del círculo es el punto de Lemoine K, el de la elipse es el centro de gravedad G y los ejes de homología son, respectivamente, la polar k de K con relacion al círculo y la recta en el infinito g, deduce que: 1.º *el punto de Steiner es el polo trilineal de la recta que une el punto de Lemoine al centro de gravedad;* 2.º *las rectas* K_1G_1, K_2G_2, K_3G_3 *se confunden con los lados del triángulo* $R_1R_2R_3$.

Finalmente, de las muchas propiedades deducidas por M. Neuberg, sólo citaremos que: *el punto de Steiner es el conjugado isogonal con el punto situado en el infinito sobre* K, que: *Toda cónica* U *circunscrita al triángulo fundamental* $A_1A_2A_3$ *tiene por transformada por puntos recíprocos la polar trilineal del recíproco de su polo de homología.*

En particular, la elipse E es la transformada isotómica de la recta en el infinito, etc.

Z. G. de Galdeano

VORLESUNGEN ÜBER DI ALGEBRA DER LOGIK (EXACTE LOGIK)

von Dr. ERNST SCHÖDER

La *Introducción* á la obra consta de 125 páginas en las que expone el Dr. Schröder extensas consideraciones sobre el carácter y límites propios del problema del *Álgebra de la lógica ó lógica matemática (exacte logik)* tratando de la inducción, deducción y el juicio inductivo y contradictorio, del sujeto pensante de sus representaciones y del objeto.

La introducción, en suma, es un estudio crítico del problema que constituye la obra, no sólo examinado en sí y conforme al criterio personal del Dr. Schröder, sino basado también en cuanto se ha edificado en este género de investigaciones por los filósofos y matemáticos, partiendo del sistema de Boole.

Sería prolijo enumerar los escritores á que ha consultado y á que hace referencia el Sr. Schröder, exponiendo además una larga lista obras al final del primer tomo que hasta ahora ha aparecido.

Nos limitaremos á citar á Bain, Boole, Cayley, *(Note on the calculus of logic* "The Quaterly Journal of pure and applied mathematics), Clifford *(on the types of compound statement involving four clases,* etc.), Dedekind *(Was sind und vas sollen die Zahlen?)* Delboeuf, *Logique algorithmique,* Morgan *(Formal logic,* etc.), los escritos relacionados con el asunto de M. Drobisch, Euler, Grassmann, W y William Rowan Hamilton, Jevons, Kant, Lambert, Liard, Lipschitz, Peano, Peirce, Schffler, Spottiswoode, Stolz, Ueberweg Wundt, con lo cual se formará el lector idea de la amplia base sobre que descansa la obra del Dr. Schröder, reservándonos el tratar de las importantes ideas desenvueltas por estos y otros escritores para nuestro artículo próximo á aparecer sobre *el simbolismo del Álgebra moderna.*

Principia á entrar en materia estudiando el *juicio categórico* que presenta bajo la forma de *teorema* que une á un *sujeto* un *predicado,* expresándose esta unión por medio de la cópula "*es*".

Para expresar esta relación emplea el Sr. Schröder un signo especial $\subset$ además del signo $=$ tomado de la Matemática. Así

"(todo) oro es metal"—,"(toda) sal común es cloruro de sodio"

se expresará como sigue

oro $\subset$ metal, sal común = cloruro de sodio;

y cuando empleamos una igualdad tal como $a=b$, expresamos que sus dos miembros son únicamente nombres distintos de *uno y un mismo* objeto del pensamiento.

El otro signo $\subset$, léase *subordinado (subordinirt),* y la relación $a \subset b$ se llama una *subordinación,* así como el signo $\supset$ se lee *supraordinado (übergeordnet,* superordinirt).

La relación existente, en el ejemplo arriba puesto, entre "oro" y "metal" es esencialmente la misma que existe entre una especie y el género á que está subordinada, ó bien entre un individuo y una especie á que este individuo pertenece en unión con otros. En general: *especie $\subset$ á su género.*

La cópula "es" expresará ya la una, ya la otra de ambas relaciones representadas por los signos $\subset$ ó $=$, mediante un signo compuesto de ambos "$\subseteq$" (*) para hacer por sí solo más comprensible el pensamiento. Este signo se leerá *subordinado ó igual,* pudiéndose decir que:

El juicio categórico expresa siempre que el sujeto (el concepto-sujeto) se halla subordinado al predicado (concepto-predicado) ó es idéntico con el mismo, siendo

sujeto $\subseteq$ predicado

la forma común de todos los juicios categóricos.

Una afimación de la forma

$$a \subseteq b$$

es una *subsumpción (subsumtion)* ó coordinación (einordnung), siendo dicho signo el *signo de subsumpción (subsumtionszeichen).*

(*) En la imposibilidad de emplear el signo tipográfico de que se sirve el Sr. Schröder, usamos el más aproximado que le podemos sustituir.

Pero la subsumpción da lugar á la relación inversa en que b y a se substituyen entre sí. El contenido de las proposiciones envueltas en las fórmulas

$$a \subset b, \quad a = b,$$

puede reproducirse exactamente por medio de las siguientes proposiciones:

Todo a *es* b, *pero no todo* a *es* b,
Todo a *es* b, *y además todo* b *es* a.

Evidentemente estos dos conceptos se excluyen. Nunca pueden ser los dos ciertos al mismo tiempo, puesto que el segundo contradice al primero.

Desarrollando esta cuestión capital de la subordinación, pasa el Sr. Schörder á examinar las expresiones numéricas de varios significados. Observa que la raiz cuadrada es una operación, en general, de dos significados, y escribiéndose $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{9} = -3$, se llega á la conclusión errónea $-3 = +3$, paradoja que depende del empleo poco preciso del signo de igualdad.

Para tratar esta cuestión correctamente es preciso distinguír desde luego cuidadosamente en la representación, la raíz cuadrada considerada como de múltiple significación, y distinguir el valor general del principal, siendo aquel, no un valor propiamente dicho, sino una clase completa de valores. Así, entre la raiz cuadrada múltiple y cualquiera de sus valores existe realmente la relación de subordinación del indivíduo dentro de la clase que lo comprende, lo cual indujo á Cauchy á emplear un paréntesis para designar el valor principal.

En las consideraciones preliminares que desarrolla el Sr. Schöder sobre la representabilidad del juicio como juicio coordinatorio *(subsumtionsurteile,)* trata de los juicios no categóricos expresados mediante conjunciones como: *sí,..., así,..., ó bien,...* etc., manifiesta que solo tratará, en cuanto por su contenido lógico sean representables mediante el signo de subsumpción. Observa que la relación entre el concepto del sujeto y el del predicado significa una relación de circunscripción *(Umfangsverhältnisse)* representable por la expresión $a \subset b$. La clase del sujeto se halla totalmente comprendida en la clase del predicado.

Después de tratar de la inclusión de los objetos del pensamiento como *indivíduos* de una clase, pasa á exponer la teoría del *cálculo idéntico con dominios de una variedad,* principiando por recordar el empleo del *diagrama* de Euler, mediante el cual, ya esferas ó ya circunferencias en un plano sirven para representar la circunscripción ó cierta clase de un dominio en el espacio.

Para ello, parte del supuesto por el que se dá una variedad de elementos, ya sea la variedad de puntos en la superficie de una pizarra ó de un papel, variedad que retenemos en el campo de nuestra atención de una manera permanente, sin preocuparnos de los objetos exteriores á la misma. La naturaleza de esta variedad, asi como la especie de sus elementos se halla representada á discreción nuestra, debiendo ser las consideraciones *universales*, y exigiéndose la condíción de la realidad para cada variedad imaginada de cualquier clase de elementos, pudiéndose admitir: sobre todo, la variedad de los puntos del espacio, además la variedad de todas las rectas imaginadas en el espacio, ó tambien los puntos de una recta determinada y ulteriormente la variedad del *punto-tiempo* (Zeitpunkte) de *espacio-tiempo* (Zeitraum), etc., etc.

A cualquier agrupación de elementos el Sr. Schöder la llama *dominio.* Estos dominios pueden consistir en: puntos aislados, líneas y superficies ó en una figura cualquiera dibujada en la pizarra. Y con objeto de esclarecer los teoremas generales del cálculo en cuestión acude á la representación de sus leyes por medio de superficies relacionadas entre sí, ó la manera que se hace por medio de superficies circulares, en el diagrama de Enler.

Emplea el Sr. Schröder las letras *a*, *b*, *c*,.... para designar los dominios, y funda las leyes de este cálculo en las formas generales del razonamiento matemático por las que la geometría de Euclides ha servido de modelo, para reconocer después que en las conclusiones de estas demostraciones se han empleado solamente los principios de este cálculo; y trata de los diversos empleos de las letras empleadas como signos generales, así como de los signos de operaciones y relaciones. Observa además que los elementos de la variedad que considera, pueden llamarse también *individuos*, pudiéndose ofrecer asimismo los "dominios" de esta variedad como sistemas y como *clases* de tales individuos, y llegarse á considerar como tales individuos objetos cualesquiera del pensamiento, hasta el punto de que resulten contenidos en una clase general supraordinada *(übergeordnete)*.

Respecto al *dualismo* ó reciprocidad que se observa en la adición ó multiplicación, de modo que los teoremas correspondientes se ofrecen con cierta simetría, adopta el empleo del sufijo ó subíndice + ó × al enunciar dichos teoremas en toda la exposición de la obra.

(Se concluirá). Z. G. de G.

VARIEDADES

Rivista di matematica diretta da G. Peano.—Entre las muchas publicaciones periódicas por medio de las que en Italia se difunden las teorías matemáticas, conservándose el interés por este género de estudios, hoy tenemos que señalar á los lectores de El Progreso Matemático la notable revista dirigida por el profesor de la Universidad de Turín Sr. G. Peano.

El Sr. Peano sigue con especial afición y asiduidad, aparte de otros muchos trabajos por que es conocido entre los aficionados á la ciencia matemática, este género de investigaciones que, partiendo del cálculo baricéntrico de Möbius, del Audehnungslehre de Grassmann y de la lógica algebraica de Boole, van haciéndose lugar hasta en los tratados que se destinan hoy á la enseñanza.

En su obra *Calcolo geometrico secondo l' Ausdehnungslehre de Grassmann* (1888) partió de las *operaciones de la lógica deductiva* para aplicarlas á los entes geométricos incluídos por el Sr. Peano en formaciones *(formazioni)* de cuatro especies, y estas aplicaciones de las teorías de Möbius, Grassmann, Bellavitis, Hamilton, etc., también se encuentran en su obra *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*

Consecuente en la idea de llevar hasta ulteriores aplicaciones este orden de conceptos, el Sr. Peano publica en la *Rivista di Matematica* correspondiente al año de 1891 sus interesantes artículos titulados *Principii de Logica matematica, Formola di Logica matematica* y *Sul concetto di numero;* y ciertamente que el ilustrado profesor de la Universidad de Turin conseguirá como fruto de su trabajo obtener un libro destinado á la enseñanza de teorías que van pasando al dominio general mediante la fácil y correcta exposición de sus puntos más abstrusos, hasta poco hace envueltos en cierta oscuridad por efecto de su carácter abstracto y metafísicc.

Otro de los trabajos publicados en la *Rivista di Matemática* y que expresan su tendencia educativa, el propósito de llamar la atención de la juventud hacia los ideales de la ciencia grabados de una manera permanente en las obras de los grandes maestros, es el artículo del Sr. Segre *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche.* Después de aconsejar á la juventud el abandono de cierto género de investigaciones que cautivan por su sencillez, pero que bajo un falaz aspecto de originalidad conducen á resultados infecundos y efímeros, lamentándose del exclusivismo con que se sigue por algunos, ya los estudios puramente geométricos, ya las teorías del Análisis, recomienda, apoyándose en varias citas de eminentes matemáticos, así como en el individual proceder de cada uno, la necesidad de unir ambos desarrollos de la Matemática, que en determinadas circunstancias por sus conexiones favorecen el general progreso.

Entre los ejemplos que cita de este auxilio mutuo que se prestan las dos ramas principales de la Matemática, se halla el que ofrece *la geometría sobre una curva algébrica* cuyo concepto se halla por vez primera en un trabajo analítico de Riemann, los resultados obtenidos por el Sr. Weierstrass sobre las funciones abelianas, los recientemente dados á conocer por M. Poincaré al presentar las expresiones de ciertas funciones analíticas de una variable, que denominó *funciones Fuchianas*, etc.; y en fin, después de consideraciones luminosas sobre los métodos sintéticos de los Poncelet, Staudt, etc. y los procedimientos analíticos de Sylvester y Clebsch, y en fin de la *geometría enumerativa* (1), se eleva al concepto de la rama superior constituída por la Geometría del hiper-espacio, haciendo indicaciones sobre los tres modos de presentarse el hiperespacio á los geómetras, y haciendo ver cómo la geometría en el espacio de *n* dimensiones es una generalización de la Geometría en el espacio ordinario.

Dimostrazioni di un teorema sulla transformazione delle curve algebriche di E. Bertini.—*Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di Bibliografía delle Matematiche* nota di Favaro, son otros trabajos contenidos en la *Rivista di Matematiche*.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES DE M. LONGCHAMPS—Los números correspondientes á los meses de Abril y Mayo contienen notables artículos en los cuales se desarrollan nuevas cuestiones sobre la geometría del triángulo.

El artículo de M. Poulain *Des coordonées angulaires*, contiene: I. *Propiedades de los círculos laterales* de M.—II. *Triángulos deducidos* de M.—*Triángulo podar en* M, y termina con los *triángulos anexos* de M los *puntos anexos* de M, la *utilidad de los triángulos anexos* etc. Concluye el trabajo de M. Vigarié: *Les progrés de la Geométrie du triangle en 1890*.

Sur la méthode de transformation de M. Schoute es otro artículo de M. Vigarié, que hace un estudio analítico de dicho método expuesto por M. Schoute desde el punto de vista sintético. En fin, M. de Longchamps expone una nota *Sur les points et les droites de Feuerbach*.

---

(1) SCHUBERT. *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, 1879).

Zaragoza — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos