Año I   Zaragoza 20 de Agosto de 1891   Núm. 8.º

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

SOBRE A REPRESENTAÇAO DA FUNCÇAO

LOG $\Gamma(x)$ POR UM INTEGRAL DEFINIDO

por F. Gomes Teixeira, director da Academia Polytechnica do Porto.

Serret no seu *Calcul intégral* (p 172 – 176) deduz do integral de Cauchy:

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left| (x-1)e^{-\alpha} - \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}} \right| \frac{d\alpha}{\alpha},$$

ou, pondo $\alpha = -\log t$,

$$(1) \qquad \log \Gamma(x) = \int_0^1 \left| \frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right| \frac{dt}{\log t}$$

a igualdade de Gauss

$$(2) \qquad \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2\ldots n\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Como porêm esta igualdade se demonstra de um modo muito simples sem a consideraçao do integral de Cauchy, julgamos preferivel deduzir d' ella este integral, como vamos vêr.

A igualdade (2) dá

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \left[x \lg n + \lg(1.2\ldots n) - \lg x - \lg(x+1) - \ldots - \lg(x+n) \right]$$

ou por ser

$$\log n = \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \ldots + \log \frac{n}{n-1},$$

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \Big[x \log \frac{2}{1} + x \log \frac{3}{2} + \ldots + x \log \frac{n}{n-1}$$

$$+ \log \frac{1}{x} + \log \frac{1}{x+1} + \ldots + \log \frac{n}{x+n} \Big].$$

Temos porêm

$$\log \frac{\beta}{\alpha} = \int_0^1 \frac{t^{\beta-1} - t^{\alpha-1}}{\log. t}\, dt.$$

Logo

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \left| x \int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\, dt + x \int_0^1 t \frac{t-1}{\log t}\, dt + \ldots \right.$$

$$+ x \int_0^1 t^{n-2} \frac{t-1}{\log t}\, dt + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{\log t}\, dt + \int_0^1 \frac{1-t^x}{\log t}\, dt$$

$$\left. + \int_0^1 t \frac{1-t^x}{\log t}\, dt + \ldots + \int_0^1 t^{n-1} \frac{1-t^x}{\log t}\, dt \right|$$

$$= \lim_{n=\infty} \left| x \int_0^1 \frac{t-1}{\log t} (1+t+t^2+\ldots+t^{n-2})\, dt + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{\log t}\, dt \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{1-t^x}{\log t} (1+t+\ldots+t^{n-1})\, dt \right|$$

Mas

$$1+t+t^2+\ldots+t^{n-2} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n-1}}{1-t},$$

$$1+t+t^2+\ldots+t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}.$$

Será pois

$$\log \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \left| x \int_0^1 \frac{-1}{\log t} dt + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{\log t} dt + \int_0^1 \frac{1-t^x}{(1-t)\log t}\, dt \right.$$

$$\left. - x \int_0^1 \frac{(t-1)\, t^{n-1}\, dt}{(1-t)\log t} - \int_0^1 \frac{(1-t^x)\, t^n\, dt}{(1-t)\log t} \right|$$

ou

$$\log \Gamma(x) = \int_0^1 \left| \frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right| \frac{dt}{\log t}$$

$$+ \lim_{n=\infty} \int_0^1 t^{n-1} \frac{t^{x+1} - (x+1)t + x}{(t-1)\ \log t}\, dt.$$

O ultimo integral que entra n' esta formula dá, attendendo ao primeiro *theorema da media,*

$$\int_0^1 t^{n-1} \frac{t^{x+1} - (x+1)\,t + x}{(t-1)\log t}\, dt = K \int_0^1 t^{n-1} dt = K \frac{t}{n},$$

K representando um numero que nao é superior ao maior nem inferior ao menor dos valores que toma a funcçao

$$\frac{t^{x+1} - (x+1)\ t + x}{(t-1)\ \log t}$$

quando t varia desde 0 até 1. Como esta funcçao é finita neste intervallo e $\frac{1}{n}$ tende para zero quando n tende para o infinito, temos

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 t^{n-1} \frac{t^{x+1} - (x+1)\ t + x}{(t-1)\ \log t} = 0,$$

e portanto

$$\log \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1 \right] \frac{dt}{\log t}$$

que é o resultado que pretendíamos demonstrar.

LOS PROGRESOS DE LA GEOMETRIA DEL TRIANGULO EN 1890

POR M. E. VIGARIÉ

(Conclusión)

10. PARÁBOLAS DE MANDART.—Sean ABC un triángulo cualquiera, A', B', C' los puntos medios de los lados, I, I_a, I_b, I_c los centros de los círculos tangentes á los tres lados del triángulo.

Tomemos en BC, CA, á un mismo lado de BC, los segmentos BM $=CN=\lambda$; sobre BC, AB á un mismo lado de CA los segmentos $CM_1=AN_1=\lambda_1$; sobre AC, BC, á un mismo lado de AB, los segmentos $AM_2=CN_2=\lambda_2$.

Llamemos d_a, d_b, d_c las tres transversales MN, M_1N_1, M_2N_2.

Las transversales d_a, d_b, d_c envuelven parábolas M_a, M_b, M_c. Estas son las estudiadas por M. Mandart. (*Sur un groupe de trois paraboles*, Math. pp. 30-33).

1. La parábola M_a toca á AB, AC en puntos m, n. *La recta mn es paralela á la bisectriz AI. El vértice S_a se halla en el medio p de mn.*

2. Se halla inscrita al triángulo ABC; su foco es el punto de intersección del círculo circunscrito y del eje AS_a. La directriz es paralela á AI y pasa por el ortocentro H.

3. La parábola M_a tiene por ecuación baricéntrica:

$$\alpha^2 (b-c)^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2 + 2b(b-c)\alpha\beta - 2c(b-c)\alpha\gamma + 2bc\beta\gamma = 0.$$

4. Si I' y O' son los centros del círculo inscrito y de los círculos circunscritos al triángulo $I_a I_b I_c$, la tangente en el vértice S_a es la recta AI'. Los puntos H, I', O' son tres puntos en línea recta; I' se halla en el punto medio de HO'. Las cuerdas de contacto mn, m_1n_1, m_2n_2, concurren en el punto simétrico de I con relación á I'.

M. Mandart dá varias propiedades de las transversales d_a, d_b, d_c y de un segundo grupo de tres parábolas que ofrecen muchas analogías con las precedentes.

11. Cónicas notables.—M. Boutin ha estudiado un grupo de cuatro cónicas, son las transformadas por puntos inversos de las rectas que unen el centro del círculo circunscrito O á los centros de los círculos tangentes á los lados del triángulo. (*Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle.* Journ. de mathém. Spéc. pp. 104-107, 124-127). Estas cuatro cónicas, designadas por (B), (B_a), (B_b), (B_c) dan orígen á las proposiciones siguientes:

1. Siendo A_1, B_1, C_1 los puntos de contacto del círculo inscrito con los lados de ABC, si se toman en el mismo sentido, sobre IA_1, IB_1, IC_1 las longitudes $IA_2=IB_2=IC_2=l$; las rectas AA_2, BB_2, CC_2 son concurrentes. El lugar de su punto de intersección es la cónica (B).

Se tienen teoremas análogos cuando se reemplaza el centro del círculo inscrito por uno de los centros de los círculos ex-inscritos.

2. Si un triángulo se deforma de modo que resulte á la vez inscrito y circunscrito á dos círculos fijos, la recta que une su punto de Nagel á su punto de Gergonne gira al rededor de un punto fijo de la línea de los centros. En el mismo movimiento el primer recíproco del punto de Nagel de todos estos triángulos es fijo.

12. Cúbicas.—En 1889, M. Boutin había escrito una Nota *sur les cubiques remarquables du plan du triangle.* (Journ. de math. Spéciales p. 265).

Nosotros hemos completado este artículo por la indicación *(Note bibliographique sur les cubiques* J. S 1890, pp. 63-69) de algunas noticias bibliográficas. Nuestra nota se continúa por una comunicación de M. *Boutin* (pp. 67-69) sobre las cúbicas estudiadas en el año anterior.

En los *Problémes sur le triangle* (J. S. 1890, pp. 265-269) M. Boutin ha vuelto sobre el asunto, dando las proposiciones siguientes:

1. Supóngase en el plano del triángulo ABC un punto M cuyas coordenadas normales son: x', y', z'. Sobre las proyectantes ortogonales de M, y en un mismo sentido, llévense las longitudes $MA'=Kx'$, $MB'=Ky'$, $MC'=Kz'$. Determinar K de manera que las rectas AA', BB', CC' sean concurrentes. Determinar los puntos M tales, que estas rectas concurran, cualquiera que sea K. El lugar del punto de concurso, cuando M coincide con el centro del círculo circunscrito O es la cubica de las inversas relativa al ortocentro.

2. Considérese un punto M en el plano de un triángulo; desde este punto, sobre perpendiculares á los lados, y en un mismo sentido, se toman longitudes $MA'=Kx'_1$, $MB'=Ky'_1$, $MC'=Kz'_1$, siendo (x'_1, y'_1, z'_1) las coordenadas de un punto cualquiera P. Determinar K de manera que las rectas AA', BB', CC' sean concurrentes.

3. Una recta cualquiera corta á la recta de Euler en un punto cuyo parámetro es K_1 y á la hipérbola de Jerabek en dos puntos cuyos parámetros son: K_2, K_3. Existe entre K_1, K_2, K_3 la relación

$$1 + K_1K_2K_3 \cos A \cos B \cos C = 0.$$

Como casos particulares se tienen las proposiciones siguientes:

4. La recta que une dos puntos de la hipérbola de Jerabek, cuyos parámetros tienen un producto constante, encuentra á la recta de Euler en un punto fijo P.

5. La recta que une un punto cualquiera de la recta de Euler á un punto de la hipérbola de Jerabek, elegido de manera que el producto de los parámetros sea constante, encuentra á la curva en un segundo punto fijo P_2.

Al artículo de M. Boutin sigue una interesante Nota de M. Neuberg (pp. 269-270).

La multiplicidad de los trabajos promovidos por la geometría del triángulo, y la falta de espacio, nos obligan á señalar solamente las *Propriétés du triangle* (Journ. élém 1890, pp. 73-77, 97-99) de M. Bénézech y la *Théorie des triangles caractérisés* (J. E. 1890, pp. 203-206, 234-237, 252-256) de M. de Longchamps. El autor llama así á los triángulos en los cuales los lados a, b, c, verifican una relación tal como la siguiente:

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0.$$

13. Generalidades.—Varios esfuerzos se han hecho para generalizar la geometría del triángulo, y aplicarla, por transformaciones convenientes, á los polígonos planos y á las figuras de tres dimensiones. Citaremos con este objeto dos Memorias publicadas en *Mathesis*:

1.ª *Complément à la théorie des polygones harmoniques, par M. J. Casey* (M. pp. 96-104).

2.ª *Sur le tétraèdre orthocentrique, par M. de Longchamps* (Mathesis pp.49-53, 77-82).

Recordaremos también que hemos publicado, en los *Comptes-rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrés de París) una *Esquisse historique sur la marche des developpements de la Géométrie du triangle* en la cual nos hemos propuesto resumir los progresos de esta ciencia desde su orígen:

Citemos para terminar las dos obras publicadas recientemente:

1.ª *Géométrie élémentaire récente*, por M. J. Casey, 80 páginas en 8.º Es la traducción, por M. Falisse, del capítulo suplementario de *A sequel to Euclid*, publicado en *Mathesis* (Enero, 1889). La obra contiene el complemento á la teoría de los polígonos armónicos (Mathesis Abril, 1890). En el prefacio, debido á M. Neuberg, se citan los principales promovedores de la Geometría del triángulo.

2.ª *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze*, por M. W. Fuhrmann, 150 páginas y 14 láminas, libro analizado en este periódico. (Journ. de mathém. élém.)

ALGUNOS TRABAJOS DE M. NEUBERG SOBRE LA GEOMETRIA DEL TRIANGULO

Vamos á completar la reseña de las obras de M. Neuberg, que comenzamos en el número anterior, haciendo algunas indicaciones acerca de sus Memorias *Sur le quadrilatère harmonique, Sur les axes de Steiner et l' hyperbole de Kiepert* y *Sur les foyers d' Steiner d' un triangle,* con objeto de facilitar para lo sucesivo nuestro propósito de dar á conocer de una manera general el alcance que en la actualidad tieno la Geometría del triángulo, tan considerablemente enriquecida en estos últimos años.

Para establecer de la manera más completa la analogía entre el triángulo y el cuadrilátero, considera M. Neuberg en su Memoria citada *Sur le quadrilatère harmonique*, el cuadrilátero inscriptible ABCD (lám. III. fig. 9.ª), en cuyo plano existe un punto E, cuyas distancias á los lados sean proporcionales á éstos.

Ahora, si B′ es el punto de intersección de las tangentes trazadas por A y C al círculo ABCD y B″ el de las tangentes trazadas por B y D, las simedianas B′B, B′D, B″A, B″C de los triángulos ABC, ADC, BAD, BCD son, respectivamente, los lugares de los puntos cuyas distancias á los lados de los ángulos B, D, A, C del cuadrilátero son proporcionales á éstos. Por consiguiente, la existencia del punto E exige que B′ esté en BD y B″ en AC, condiciones que se reducen á una sola. Entonces E se confunde con el punto de intersección de las diagonales AC, BD. Pero las perpendiculares bajadas desde D á AB y BC, á causa de dos triángulos semejantes, son entre sí como AD y CD; se tiene pues la condición

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad ó \quad AB.DC = AD.BC.$$

Este cuadrilátero se ha llamado *cuadrilátero armónico* (1). El punto E puede llamarse *punto de Lemoine*.

Varias propiedades expone á continuación M. Neuberg del cuadrilátero armónico. Así, *á un círculo dado puede inscribirse una infinidad de cuadriláteros armónicos que tienen por punto de Lemoine un punto interior dado* E, lo que se establece trazando por E una cuerda cualquiera AC, y uniendo el punto E al polo B′ de AC (M′ Cay). Además, *todo triángulo* ABC *dá lugar á tres cuadriláteros armónicos*, pues siendo A′B′C′ el triángulo formado por las tangentes en A, B, C al círculo circunscrito O, las simedianas AA′, BB′, CC′ concurren en el punto de Lemoine K del triángulo ABC, que cortan al círculo en puntos D_a, D_b, D_c, y á los lados BC, CA, AB en puntos E_a, E_b, E_c, tales que los cuadriláteros $ABD_a C$, $ABCD_b$, $ACBD_c$ son armónicos y tienen por puntos de Lemoine á E_a, E_b, E_c respectivamente.

Siendo $EX = x$, $EY = y$, $EZ = z$, $EU = u$ las perpendiculares trazadas desde E á a, b, c, d, se tiene que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d},$$

(1) MÖBIUS. *Journal de Crelle*, t. LII. p. 288.

y, representando estas relaciones iguales por la expresión $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$, este ángulo φ es el *ángulo de Brocard* del cuadrilátero.

También define M. Neuberg el *círculo de Brocard* del cuadrilátero armónico ABCD, que es el descrito sobre la recta OE como diámetro, y el *primer cuadrilátero de Brocard,* que es el que tiene por vértices los puntos M, N, P, Z en que el círculo de Brocard encuentra á las perpendiculares trazadas desde O á los lados *a, b, c, d.*

De las propiedades de los dos cuadriláteros de Brocard pasa el señor Neuberg á desarrollar las que se deducen respecto á un sistema de figuras semejantes. También deduce que los puntos de Brocard son los focos de una elipse inscrita al cuadrilátero armónico *(elipse de Brocard),* y llega, en fin, á los *círculos de Tucker* del cuadrilátero ABCD.

Sur les axes de Steiner et l' hyperbole de Kiepert y *Sur les foyers de Steiner d' un triangle* son otros dos trabajos presentados por MM. Neuberg y Gob *(séance du 12 août 1889. Assoc. Franc).*

Siendo ABC el triángulo fundamental, G, O, H, K el centro de gravedad, el centro del círculo circunscrito, el ortocentro y el punto de Lemoine de ABC; A'B'C' el triángulo complementario de ABC (1), A"B"C" el triángulo anticomplementario; E la elipse circunscrita á ABC que tiene su centro en G; GX, GY las rectas segun las cuales se hallan dirigidos los ejes principales de las elipses E y E'.

La cónica **E** ha recibido el nombre de *elipse de Steiner* de ABC.

M. Neuberg propone llamar á las rectas GX, GY *ejes de Steiner* de ABC, y en este trabajo dá á conocer un gran número de propiedades del eje de Steiner, cuyo estudio se halla íntimamente ligado con el de la hipérbola de Kiepert.

Para hallar las direcciones de GX y GY, observa que basta conocer el cuarto punto R común á la elipse **E** y á la circunferencia ABC; porque las cuerdas comunes BC, AR tienen direcciones antiparalelas (simétricas) con relación á GX.

Ahora, si A_s, B_s, C_s son simétricos de A, B, C con respecto á G, las cuerdas B_s C_s, AR de **E** son todavia antiparalelas, y, por consiguiente, sus extremidades pertenecen á una misma circunferencia. Luego: *las circunferencias* ABC, A_sB_sC, A_sBC_s, AB_sC_s *se cortan en un mismo punto* R de **E**, *y dos lados opuestos del cuadrángulo completo* ABCR son *antiparalelos con respecto á un eje de Steiner.*

---

(1) Si dos puntos M y M' se hallan en línea recta con G y MG = 2GM', M' se llama el *complementario* de M'. Véase el estudio *Sur les points complémentaires,* por M. Vigarié (*Mathesis* t. VII).

En cuanto á la terminología, admitamos la del *Premier inventaire de la Géométrie du triangle,* par M. Vigarié (*Congrés de Toulose* p. 27).

Además, *los círculos de los nueve puntos de los triángulos* ABC, GBC, GCA, GAB *se cortan en un mismo punto* Q *de la elipse* **E**'; Q *es el complementario de* R.

Siendo cada una de estas circunferencias el lugar de los centros de las hipérbolas equiláteras circunscritas al triángulo correspondiente, Q *es el centro de la hipérbola equilátera* Γ (hipérbola de Kiepert) *que pasa por los puntos* A, B, C, G.

Prolonguemos HQ en QN = HQ (lám. III, fig. 10); el punto N, que pertenece á la vez á la hipérbola Kiepert y á la circunferencia ABC (H es un centro de semejanza de las circunferencias ABC, A'B'C') se ha llamado el *punto de Tarry*.

Las relaciones HQ = QN, RG = 2 GQ manifiestan que G *es el centro de gravedad del triángulo* RHN (Cesáro *Remarques sur la Géométrie du triangle,* Nouv. Ann. 1887); de aquí resulta que el complementario de H coincide con el punto medio de RN. Luego R y N *son los extremos de un mismo diámetro de la circunferencia* ABC.

Este resultado tiene una consecuencia importante: los ejes principales de **E** son paralelos á las bisectrices del ángulo (BC, AR), los de Γ son paralelos á las del ángulo (BC, AN), y las rectas AR, HN son perpendiculares. Por consiguiente, *los ejes de Steiner son paralelos á las asíntotas de la hipérbola de Kiepert.*

Una secante cualquiera trazada por el punto Q *encuentra á los ejes de Stiener en dos puntos, por los cuales se trazan paralelas á estos ejes. El punto de intersección describe la hipérbola de Kiepert.*

Además, M. Neuberg indica una nueva generacion de Γ.

Siendo P un punto movil de Γ (lám. III, fig. 11), las rectas AP, BP, CP encuentran á BC, CA, AB en puntos P_a, P_b, P_c que se corresponden en tres puntuales homográficas. Siendo C un elemento *unido* de las puntuales (P_a) y (P_b), la recta P_a P_b pasa por un punto fijo m_c. Si h_a, h_b, h_c son los piés de las alturas de ABC, las rectas h_a h_b, A'B' y las tangentes trazadas en los puntos A, B de Γ son posiciones particulares de p_a p_b; pasan pues, por m_c. Por consiguiente:

Sean m_a, m_b, m_c *las intersecciones de los lados homólogos del triángulo complementario* A'B'C' *y del triángulo órtico* h_a h_b h_c *de un triángulo dado* ABC. *Por estos puntos se pueden hacer pasar los lados de una infinidad de triángulos* p_a p_b p_c *inscritos á* ABC *y perspectivos con* ABC; *el lugar de los centros de perspectiva es la hipérbola de Kiepert de* ABC. *Los lados del triángulo* m_a, m^b, m_c *tocan á esta curva en los puntos* A, B, C.

Las importantes Notas de MM. Neuberg y Gob, de que hacemos estas indicaciones, terminan tratando de los *metapolos y centros metarmónicos* y de algunas *propiedades de los focos de Steiner.*

Para no prolongar demasiado esta reseña nos limitaremos á citar, entre los varios escritos de M. Neuberg sobre la Geometría del triángulo, sus Memorias *Sur les triangles equibrocadiens*, *Sur les polygones et les polyèdres harmoniques*, y muy especialmente su notable Memoria *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe* (1), presentada á la Real Academia de Ciencias de Bélgica, y publicada en sus Memorias, pues tan importantes trabajos, del cual hace algunas indicaciones M. Vigarié en su escrito, cuya traducción hemos dado á conocer en este periódico, *Les progrès de la Géométrie du triangle*, exigiría mucho espacio y entrar en considerables desarrollos.

Z. G. DE G.

VORLESUNGEN ÜBER DI ALGEBRA DER LOGIK (EXACTE LOGIK)

VON DR. ENRST SCHRÖDER

(CONCLUSION)

Dos principios fundamentales establece desde luego el señor Schröder:

1.° *El principio de la identidad* a $\underline{\subset}$ a que se expresa en palabras "*a es a*".

Si pues *a* representa un dominio de puntos (por ejemplo, una superficie), dicho principio, designado por *teorema* ó *principio* I, se reduce á decir: a *se halla contenido en sí, es una parte de* a; a *se halla subordinado ó es idénticamente igual á* a.

2.° (*Teorema* ó *principio* II). *Si* a $\underline{\subset}$ b, *y al mismo tiempo* b $\underline{\subset}$ c, *también* a $\underline{\subset}$ c.

Este principio es el silogismo de la antigua lógica que ofrece el esquema, según el cual de dos verdades conocidas se deduce una tercera, siendo a $\underline{\subset}$ b y b $\underline{\subset}$ c las premisas y a $\underline{\subset}$ c la conclusión.

Como consecuencia inmediata resulta que: *se puede en un juicio sustituir el sujeto por un sujeto del mismo, y en vez del predicado un predicado de éste.*

Una definición fundamental (la *definición* (1)) en la obra del doctor Schröder es la de la igualdad idéntica *(identidad)*.

(1′) *Si* a $\underline{\subset}$ b *y al mismo tiempo* b $\underline{\subset}$ a *se puede establecer que* a = b.

(1″) *Si* a = b *resulta que* a $\underline{\subset}$ b *y* b $\underline{\subset}$ c.

(1) Bruxelles. F. Hayer. 1890.

De manera que toda igualdad puede invertirse, siendo una *relación simétrica.*

Citaremos únicamente los siguientes teoremas, cuyas demostraciones hace depender el Sr. Schröder de los anteriores fundamentos: 1.° *Cada dominio es idéntico á sí mismo,* a = a. 2.° *Si* a $\subseteq$ b *y* b = c, *resulta* a $\subseteq$ c. 3.° *Si* a = b *y* b $\subseteq$ c *también* a $\subseteq$ c.

Define enseguida *dos dominios especiales* que deben considerarse en el Algebra de la lógica; *lo idéntico nulo* y *lo idéntico uno*, expresados por 0 $\subseteq$ a y a $\subseteq$ 1, siendo 0 un *dominio* que se halla subordinado á todo dominio a, es decir, *contenido en todos los dominios de la variedad,* y el 1 un *dominio* al que se halla subordinado todo dominio a, *en el cual se halla contenido todo dominio de la variedad.* (Estas son las definiciones ($2_\times$) y (2_+) de dicha obra.

Citaremos, en fin, el teorema 5 en sus dos casos:

$5_\times$) *Si* a $\subseteq$ 0, *se tiene que* a = 0. || 5_+) *Si* 1 $\subseteq$ a, *se tiene que* 1 = a.

ó expresado verbalmente:

La subordinación de un dominio respecto á 0, lleva consigo la anulación de dicho dominio.	*La supraordinación de un dominio respecto al* 1, lleva consigo la identificación del mismo con 1.

La tercera lección de la obra está destinada á la *multiplicación* y la *adición idénticas,* operaciones las más importantes del cálculo de los dominios.

Observa, al compararlas con las de igual nombre de la Aritmética, que así como en ésta son dos grados distintos, de los que la adición es el segundo, en el cálculo de los dominios la sucesión ó prioridad de una con respecto á la otra es arbitraria, siendo independientes entre sí, y en cierto modo de igual condición ó preeminencia, obteniéndose sus definiciones separadamente con respecto al sujeto ó al predicado. Así:

Definición ($3_\times$) Definición (3_+)

Si para dominios dados a, b, c *se tiene simultáneamente*

c $\subseteq$ a *y* c $\subseteq$ b || a $\subseteq$ c *y* b $\subseteq$ c

también se obtendrá

c $\subseteq$ ab || a + b $\subseteq$ c,

definiéndose así el producto idéntico como *predicado* y la suma idéntica como *sujeto.* Además existe, por lo menos, un dominio *c* que satisface á la definición (3), cuando respectivamente *c* es 0 ó 1, de manera que $0 \subseteq ab$ y $a + b \subseteq 1$, siguiendo el tecnicismo empleado por Boole.

También citaremos el teorema (6) expuesto en doble columna por el Sr. Schröder, según la manera de exposición adoptada en toda la obra:

$$6_{\times}) \quad ab \subseteq a, \; ab \subseteq b \qquad \| \qquad 6_{+}) \quad a \subseteq a + b, \; b \subseteq a \times b,$$

cuya demostración depende del principio I y de la definición (3), y que corresponde á las *identidades parciales* de Jevons [1].

Al establecer los postulados referentes á la significación de 0, 1, ab, a + b como dominios, ofrece representaciones gráficas para aquellos dos extremos de valores existentes entre los dominios concebibles de la variedad, fuera de los cuales es imposible el suponerse ninguna clase de variedad, y también, tanto para los dominios que contienen puntos comunes, á otros dos dados, como los que contienen los puntos pertenecientes ya al uno, ya al otro de éstos.

Trata en seguida de la traducción al lenguaje ordinario de las operaciones idénticas aplicables á las clases.

La multiplicación idéntica se reduce á la *separación* ó *selección*, la adición idéntica á *reunión* ó *colección;* la primera separa de una clase dada indivíduos que pertenecen á otra clase, la segunda reune dos clases supuestas en otra que contenga simultáneamente los indivíduos de ambas.

En cuanto al producto idéntico *ab*, si las clases *a* y *b* están designadas con nombres sustantivos, aquél se designará mediante una palabra formada por la unión de éstos, ó también uno de los factores del producto se representará con un sustantivo y el otro con un adjetivo. Ejemplos: esclavo negro, caballo blanco.

También se emplea, con el mismo objeto, un pronombre relativo. Así, *ab* significa "*las* a *que son* b„.

Esto conduce á la *determinación* que disminuye la extensión de los conceptos y aumenta su comprensión, efectuándose esta determinación de las clases por medio de cada factor. Así, en el producto *bc*, por ejemplo, el factor *b* produce una determinación de *c*.

La distinción entre las conjunciones copulativa y disyuntiva es capital en esta teoría después de tratar de la conjunción, *y*, correspondiente á la multiplicación, se ocupa de la disyuntiva, *o*, adecuada al concepto de la adición, y la analiza en sus varias acepciones, ya como significando "*esto es*„, ya en su acepción exclusivamente disyuntiva "*ó sino*„ *(oder aber)*, ya en su acepción inclusiva ó conjuntiva "*ó tam-*

(1) *The principles of Science*, págs. 40-41.

bién (oder auch), debiéndose expresar la suma idéntica mediante la locución en este último sentido, cuando se halla como sujeto. En fin, *la partícula, y, tiene un significado absolutamente distinto en el sujeto y en el predicado.*

Para discutir las consecuencias que resultan de agregar una clase nula, parte el Sr. Schröder de la proposición $(6_\times)$ expresada por $ab \subset a$, para examinar el caso $ab = 0$.

La proposición: *Todos los triángulos rectángulos equiláteros son equiláteros,* que corresponde al caso general $(6_\times)$, cuando se trata de triángulos esféricos, corresponde al caso $ab = 0$, cuando los triángulos són rectilíneos, no existiendo ningún indivíduo en la clase representada.

La *nada es sujeto de todo predicado,* hallándose la clase nula contenida en toda clase. El caso $a = 0$ es el en que la clase no contiene ningún indivíduo, y la expresión $a \subset b$ deberá traducirse: "*ó no existe* a, *ó si existe, todo* a *es* b.„

Trata también el Sr. Schröder del juicio correspondiente á $a \subset 1$, que puede expresar, por ejemplo, "*oro es algo*„, "*cosa negra es algo, etc.;*„ representando el pronombre "*algo*„ *(etwas)* la clase que comprende en sí todo lo imaginable, clase designada por Boole con el 1 y por Peirce con ∞.

Despues de demostrar que las leyes *conmutativa* y *asociativa* se aplican al cálculo idéntico, establece relaciones fundamentales y exclusivas de este cálculo, como son que: $aa = a$ y $a + a = a$ ó, en general,

$$aaa \ldots = a \qquad \| \qquad a + a + a + \ldots = a$$

de manera que

$$abcaabdacde \qquad a + b + c + a + a + b + d + a + e + d + c$$

se reducen á $abcd$ y á $a + b + c + d$.

Así, por ejemplo: hombre y hombre es hombre, oro ú oro es oro.

También si $a = b$, $ac = bc$ y $a + c = b + c$.

Si $a \subset b$ y $a' \subset b'$, $aa' \subset bb'$ y $a + a' \subset b + b'$

Cualquiera de las igualdades $a = ab$, $a = a + b$ es una perífrasis de la relación $a \subset b$.

En fin, como en las operaciones aritméticas análogas,

$$a.\,1 = a, \;\; a.\,0 = 0, \;\; a + 0 = a,$$

y además $a + 1 = 1$, siendo 1 y 0 los *módulos* respectivos de la multiplicación y la adición.

El teorema 23, á saber:

$23_\times$) Se tiene que $a(a+b)=a$ || 23_+) $a+ab=a$

conduce á la *ley de absorción* que permite la simplificación de las expresiones.

Así; $ab(a+b)$, $a+b+c+ab+ac+bc \times abc$ se reducen á ab y $a+b+c$.

El teorema

$$25_\times)\ ab+ac \subseteq a(b+c) \quad || \quad 25_+)\ a+bc \subseteq (a+b)(a+c)$$

expresa la ley distributiva.

La multiplicación, la adición y la negación se consideran en el Algebra de la lógica como *tres especies* del cálculo idéntico. Con objeto de esclarecer el concepto de negación, antepone el siguiente teorema fundamental:

Si $ab=0$ y $a+b=1$ al mismo tiempo que $ac=0$ y $a+c=0$, resultará $b=c$.

Para expresar la negación adopta el sub-índice 1, aplicado á la letra que designa el objeto de que se trata, y la define diciendo:

Negación de un dominio a es cierto dominio a_1 relacionado con el primero de manera que

$$aa_1 \subseteq 0 \ \text{ y } \ 1 \subseteq a+0_1.$$

Pero, además, como $0 \subset aa_1$ y $a+a_1 \subset 1$, según el teorema (5); en virtud de la definición (1) (es decir, por ser recíprocas dichas relaciones resulta el teorema:

$30_\times$) $aa_1=0$ || 30_+) $a+a_1=1$

Así pues; *negación de un dominio es cierto dominio que con aquél es disyuntivo y suplementario.*

También se obtiene como consecuencia inmediata que: $0_1=1$ y $1_1=0$, de manera que la negación del 0 es 1, é inversamente.

Consecuencia del último teorema es que:

Un producto se anula, cuando entre los factores hay algunos que son la negación de otros. || *Si se hallan en una suma términos que son la negación de otros, la suma tiene el valor 1.*

$abc.\,ab_1.\,cd_1=0$ || $a+b+c_1+a+c+d_1+1.$

El teorema (31), $(a_1)_1 = a$, indica que: *la negación de la negación de un dominio es este mismo dominio,* pues siendo, según el teorema (30)

$$a_1 . a = 0, \quad a_1 + a = 1, \quad a_1 . (a_1)_1 = 0, \quad a_1 + (a_1)_1 = 1,$$

resulta, según la proposición fundamental (29), que $a = (a_1)_1$.

Es digna de citarse la notable relación

$$1 = ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1,$$

cuya demostración se obtiene con el siguiente desarrollo:

$$1 = a + a_1 = a . 1 + a_1 . 1 = a (b + b_1) + a_1 (b + b_1) = ab$$
$$+ ab_1 + a_1 b + a_1 b_1,$$

y que representa el Sr. Schröder mediante una figura formada por dos circunferencias secantes a y b en las que señala la parte común $a\,b$, etc., siendo $a_1\,b_1$ la parte externa á ambas.

Después de tratar la teoría del *dualismo,* basada en la permutabilidad de los signos de la sub y supraordinación, el 0 y el 1 los signos $\times$ y $+$, hace una exposición extensa acerca de los juicios negativos y limitativos, distinguiendo las dos formas

(β) A» no es «B, (γ) A es» no B «

Observa que »no B« ó B_1 se ofrece como un dominio de la variedad á que pertenecen A y B, pudiéndose sostener que: «El dominio A se halla contenido en el dominio $-B$, es decir, en el dominio que queda cuando se prescinde de los elementos de B, y solo de éstos.»

Examina las teorías de Lotze, Sigwart y Kant acerca del juicio limitativo de éste, y en general, sobre el concepto de negacion, ocupándose además el Sr. Schröder de los juicios disyuntivos.

A es B ó C, A es B ó A es C, ó también, A es» B ó C» siendo categórico el juicio, en este caso, y correspondiéndole el predicado »B ó C«.

Trata enseguida del significado de la negación de las clases, partiendo de las igualdades

$$30_\times) \quad a\bar{a} = 0, \quad 30_+) \quad a + \bar{a} = 1, \quad 31) \quad \bar{\bar{a}} = a,$$

de las que la última expresa la proposición: *no-nada es algo.*

La proposición $(30_\times)$ significa: *no existe lo que al mismo tiempo es* a

y no es a, que es el principio de contradicción de la antigua lógica. La (30_+) indica que *todo es»* a *ó no* — a «.

Llega enseguida al problema de la clasificación, que debe ser completa, así como sus términos disyuntivos, excluyéndose mútuamente, de modo que su producto sea cero.

Como ejemplo, siendo a la especie por clasificar y b un género tal, que $b \subset a$, ó $b = ab$, se puede hacer la división $a = ab + ab_1$; y si c es una división de ab, d una de ab_1, se tendrá

$$ab = abc + abc_1, \quad ab_1 = ab_1 d + ab_1 d_1$$

$$\text{y } a = abc + abc_1 + ab_1 d + ab_1 d_1.$$

No se deben omitir al exponer esta teoría, siquiera los enunciados de los siguientes teoremas:

$36_\times)$ $(ab)_1 = a_1 + b_1$

La negación de un producto es la suma de las negaciones de los factores.

Una suma de negaciones es la negación de sus productos.

$(a + b)_1 = a_1 b_1$

La negación de una suma es el producto de las negaciones de los términos.

Un producto de negaciones es la negación de la suma.

37) ***Si*** $a \subset b$ también $b_1 \subset a_1$ *y recíprocamente.*

Ejemplo: El oro es metal, por consiguiente, lo que no es metal no es oro. De manera que cuando *una clase se halla contenida como sujeto en una clase predicado, la negación del predicado se halla contenida en la negación del sujeto.*

Llega así el Sr. Schröder á la *conversión por contraposición,* demostrando que:

Si $a \subset b$ y al *mismo tiempo* $a_1 \subset b_1$, *resultará* $a = b$

En fin entre los muchos teoremas, que aún pudieran citarse para dar idea del amplio desarrollo que da el Sr. Schröder á la doctrina del Algebra de la lógica en el primer tomo del que nos estamos ocupando, nos bastará añadir el siguiente:

38) *La relación* $a \subset b$ *expresa lo mismo que cada una de estas*

$38_\times)$ $ab_1 = 0$ $\qquad$ $38_+)$ $a_1 + b = 1$

De manera que, por ejemplo, de que todo oro es metal, resulta que no puede verificarse el que lo que es oro no sea al mismo tiempo metal, y toda substancia concebible en la clase metal es, ó metal ó no oro.

Omitiendo el citar otros teoremas que siguen, indicaremos brevemente que la lección novena tiene por objeto diversas aplicaciones de la anterior doctrina, entre ellas la depuración del significado de las partículas *y*, *ó* y *no* en la descripción de las clases.

Así, por ejemplo, respecto á la partícula, *ó*, en su significado inclusivo, la suma idéntica

$$a + b \text{ que} = ab_1 + ab + a_1 b,$$

significa lo que es igual ya á a y no-b, ó b á y no-a, ó en fin, á a y b.

La proposición : Sales que no son coloreadas, son sales no orgánicas ó cuerpos orgánicos, se representará de la manera siguiente:

$$ac_1 \subset ab_1 + bc_1$$

ó según el teorema 38$_{\times}$) por la igualdad

$$ac_1 (ab_1 + bc_1) = o, \text{ ó } ac_1 (a_1 + b)(b_1 + c) = o.$$

Hace referencia el Sr. Schröder en esta lección á varios resultados de Peirce, Jevons, Morgan, Venn, Grove, etc., de las que solo citaremos la siguiente conclusión de Jevons relativa al sorites:

Si

$$a \subset b, \quad b \subset c, \quad c \subset d, \quad d \subset e \quad \text{y} \quad e \subset a,$$

resulta

$$a = b = c = d = e$$

Llega en la lección 10.ª al punto culminante del cálculo, tratando de las funciones y de sus desarrollos, principiando por establecer que cada dominio y puede expresarse por otro dominio x y su negación x_1 mediante la forma lineal y homogénea

$$y = ax + bx_1$$

que hace evidente con auxilio de dos círculos x, y secantes en uno de los cuales, el y, las dos partes en que resulta dividido por un arco del otro, son ax y bx_1.

Define después la función de x, ó en general, de x, y, z; etc., formadas por medio de las tres operaciones idénticas: multiplicación, adición y negación, distinguiendo los argumentos de los parámetros, los dominios variables y los constantes, pasando después á la representación simbólica de las funciones y á demostrar la relación

$$f(x) = f(1).x + f(0).x_1$$

que es el desarrollo de la función por medio de sus contituyentes x y x_1, y su extensión á más variables, de modo que por ejemplo

$$f(xyz) = f(1,1,1)xyz + f(1,1,0)xyz_1 + f(1,0,1)xy_1z + \ldots..$$

La lección 11.ª trata de las proposiciones especiales, generales, sintéticas y analíticas, de las relaciones y de las formas, ocupándose entre profundas consideraciones filosóficas de los *sistemas de raíces* de las proposiciones, ó valores que las satisfacen, de las proposiciones ciertas, falsas, absurdas, solubles, absolutamente falsas ó ciertas, etc., y, en fin, de la *eliminación* de $x, y, \ldots$ en cada sistema de proposiciones.

Por ejemplo, la ecuación

$$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0$$

ordenada respecto á x ó y es

$$(ay + by_1)x + (cy + dy_1) = 0,$$

$$\text{ó} \quad (ax + cx_1)y + (bx + dx_1)y_1 = 0,$$

y eliminando, resulta, en fin, $abcd = 0$.

La lección 12.ª está destinada á las operaciones inversas del cálculo, que ofrecen muy notables particularidades, las cuales exigirían entrar en extensas consideraciones.

En la lección 13 expone numerosas aplicaciones y problemas, ofreciendo una colección de cuestiones, entresacadas de los escritos debidos á los principales iniciadores y propagandistas de esta rama de la ciencia.

Después de indicar el Sr. Schröder su modificación del método de Boole en la lección 14.ª y última del tomo 1.º, se ocupa, antes de entrar en más ámplios desarrollos que promete dar á conocer en el tomo 2.º, de la reforma del procedimiento de Jevons, hace referencia á las observaciones de Lotze en su *Anmerkung über logischen Calcul* y dá á conocer la modificación gráfica debida á Herr Venn, terminando con los métodos de Herr Mc Coll y Peirce.

No prolongaremos esta reseña, que no poco pudiera estenderse, con sólo pretender explanar la abundante doctrina expuesta por el Sr. Schröder en los Apéndices del 1.er tomo. En el 3.º extiende el concepto y las proposiciones acerca del producto y suma de dos términos al caso de ser éstos en mayor número. En el 4.º aplica el cálculo lógico á los *grupos* y á los algoritmos de ecuaciones funcionales, y termina con el importantísimo apéndice 6.º, destinado á la teoría de los grupos en el cálculo idéntico, seguida del problema geométrico-lógico-combinatorio de Jevons y Clifford.

Lo que acabamos de exponer acerca del 1.er tomo del Algebra de la lógica del Sr. Schröder es una breve reseña de lo mucho que se halla contenido en el tratado magistral destinado á la enseñanza de lo que hoy constituye una rama digna de ser estudiada por todo el que aspire á tener idea acabada del organismo de la ciencia matemática.

Z. G. de G.

IMPORTANCIA DE LAS FORMAS CONGÉNERES EN LA MATEMÁTICA

POR

D. Lauro Clariana y Ricart

Catedrático de la Universidad de Barcelona

Suponiendo sencillamente un polígono regular y el homotético cuyos lados disten una cantidad indefinidamente pequeña de los primeros, nos dará el área diferencial congénere del área total del polígono, considerando el área comprendida entre dichos dos polígonos, la cual, integrada entre los límites de la apotema, debe procurar el resultado apetecido.

En efecto, sean l y l' los lados respectivos de los dos polígonos; a su apotema: el área diferencial será

$$\frac{nl + nl'}{2}\, da,$$

representando n el número de lados de cada polígono. De un modo análogo al del triángulo podríamos transformar esta fórmula en la siguiente:

$$\frac{nl + n\,(l - dl)}{2}\, da, \text{ de donde:}$$

$$\int_0^a nl.da - \frac{n}{2}\int_0^l dl \int_0^a da = nla - \frac{nla}{2} = \frac{nl}{2}a\,,$$

fórmula bien conocida del área de un polígono regular.

En el caso de ser un polígono cualquiera, podria descomponerse dicho polígono en triángulos, hallando luego los centros de simetría en cada uno de ellos, los cuales podriamos considerar ser los centros respectivos de las circunferencias inscritas á los mismos, como resultado de la intersección de las bisectrices, pues de este modo se tiene regularidad; por cuyo motivo podrian llamarse centros propios de homotecia, los cuales, combinándose luego entre sí por procedimientos análogos á los anteriores, sería posible alcanzar uno definitivo, como centro propio y único del polígono.

La existencia de un centro de figura, así como la constancia de valor asignable ó no sobre la perpendicular al elemento rectilíneo ó curvilíneo de la figura, simplifica las consideraciones de las formas congéneres, pues existe entonces regularidad en el sistema homotético que se desarrolla; en cambio la cuestion se complica si falta alguna de las consideraciones anteriores, pues en este caso es necesario averiguar las leyes que rigen á los diferentes centros homotéticos, á la par que las pertecientes á la variabilidad de los radios vectores, á fin de enlazarlo todo con algo constante y uniforme.

Estas ligeras consideraciones reasumen todo cuanto pudiéramos decir respecto á formas geométricas congéneres.

En el análisis cabe tambien llamar la atencion respecto á formas congéneres.

Vamos á concretarnos ligeramente á los números incomensurables, por ser esta parte una de las más interesantes del análisis.

La asociación de los números incomensurables con los comensurables, no es la más propia, pues siendo el principio de éstos la discontinuidad, no procede tomar esta cantidad como la más afine á la que debe considerarse dentro de la continuidad. Tanto es así, que con sorpresa desde tiempos antiguos, vióse que algunos números inconmensurables tenían su representación geométrica exacta, mientras que la aritmética no puede expresarlos sino de una manera aproximada.

Esto nos demuestra que la idea congénere al número incomensurable debe ser algo que se apoye en la ley de continuidad. Así, la raíz cuadrada de un número cualquiera puede representar la longitud de una recta que sale del origen, formando diferentes ángulos con el eje x y correspondientes á los límites o y 1 de esta variable en el concepto de que dicha recta sea la expresión de una integral, esto es, el límite de suma de elementos indefinidamente pequeños. De esta suerte se explica perfectamente cómo la diagonal de un cuadrado que tiene por lado la unidad, representa exactamente el valor de $\sqrt{2}$. En efecto, la longitud de una línea, se expresa por

$$s = \int_0^1 dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ahora bien, si la línea es una recta que sale del origen, formando con el eje x un ángulo de 45°, tiene por ecuación $y = x$ de donde

$$\frac{dy}{dx} = 1\,;\ \text{luego}\ \ s = \mathrm{D} = \int_0^1 dx\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

en el supuesto de representar *D* la diagonal del cuadrado que tiene por lado la unidad.

Creemos suficientes estos ligeros apuntes para dar á comprender la utilidad del estudio de las formas congéneres, esperando que otros mejor que nosotros sabrán realizar nuevas investigaciones acerca del mismo punto, á fin de aportar nuevos materiales al vasto campo de la ciencia matemática.

VARIEDADES

Advertencia Importante

Hasta el momento actual El Progreso Matemático ha tenido como uno de sus principales objetos las reseñas bibliográficas, con las cuales fácilmente llega al lector la noticia de las obras más notables y que ofrecen nuevos asuntos dignos de ser conocidos por el que sigue el desenvolvimiento siempre creciente de la ciencia matemática. Estos artículos exponen en forma abreviada las ideas culminantes sobre que cada autor aplica sus investigaciones, facilitándose de este modo que luego el lector pueda, para mayores detalles y más exacto conocimiento, acudir directamente á los trabajos originales.

Sin abandonar estos propósitos, que ponen al corriente de lo que hoy constituye la *literatura matemática*, cuyo conocimiento en España se impone de una manera necesaria, también es de suma importancia no descuidar otros puntos de vista. Uno de estos es el que originan las cuestiones por resolver, que generalmente forma una sección en las publicaciones periódicas, como aliciente que ponga en juego la actividad de los lectores, aumentando así el interés hácia las investigaciones matemáticas, por efecto de su intervención inmediata en este trabajo, que es como complementario del anterior, por el que viene en conocimiento de lo que otros han hecho al dilatar el horizonte científico.

Con el propósito, pues, de atender á este segundo fin, se establece desde luego en El Progreso Matemático una sección destinada á enunciar cuestiones y publicar las resoluciones á las mismas que resulten ser las más interesantes para los lectores.

Con objeto de inaugurar esta nueva sección, creemos oportuno comenzar desde luego, sin perjuicio de intercalar cuestiones importantes que se nos vayan remitiendo, por reproducir una série de cuestiones que, propuestas en la *Nouvelle Correspondence Mathématique,* periódico fundado por M. Catalán en 1874, quedaron pendientes de resolucion cuando á este periódico sucedió en 1881 el nuevo periódico *Mathesis,* pues creemos que será un motivo de satisfacción para los aficionados á estas investigaciones, que tales problemas no se echen al olvido, siendo, como son, en extremo interesantes. Así pues, ofreceremos desde luego á nuestros lectores diez y siete de éstas, cuyos enunciados podemos transcribir; pero como no es conveniente extralimitarnos por ahora en este sentido, no excederá el número total de cuestiones al de cuarenta, durante el año actual.

También creemos oportuno manifestar actualmente que, proponiéndonos dar á conocer la *evolución de la Geometría del triángulo,* haciendo referencia á las memorias y obras que de este asunto tratan, para formar una especie de resúmen histórico de esta rama geométrica que hoy ha alcanzado tan considerable desarrollo, á la par que vayamos realizando este propósito, principiaremos la publicación de algunas definiciones correspondientes á los textos con objeto de ir formando un *vocabulario* que evite en lo posible el encontrar términos de significación desconocida para quien fuere nuevo este interesante estudio, y esto se hará extensivo á otras diversas teorías.

***

Enunciados de las cuestiones de la «Nueva Correspondencia Matemática»

1. Hallar grupos de tres números enteros, primos entre sí dos á dos, tales, que la suma de dos cualesquiera de entre ellos no admita otros factores primos que los contenidos en el tercero. Ejemplo: 3, 5, 22. *(Ernest Quetelet).*

2. Hallar el lugar del punto de contacto de las tangentes parale-

las á una dirección dada, á una série de elipses ó de hipérbolas homofocales. *(Nicolaides).*

3. Sean ABC, A'B'C' dos triángulos situados de una manera cualquiera en el espacio. El lugar de un punto P tal, que las tres rectas trazadas por P, apoyándose respectivamente en los pares de rectas (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') se hallan situados en un mismo plano, es el hiperboloide que pasa por las rectas AA', BB', CC'. *(J. Neuberg).*

4. Si por un punto fijo P, tomado en un hiperboloide reglado, se trazan rectas que se apoyan en los diagonales de los cuadriláteros que forman dos generatrices fijas del primer sistema con dos generatrices variables del segundo, estas rectas se hallan situadas en un mismo plano. *(J. Neuberg).*

5. Sean A, B, C tres generatrices de un mismo sistema del hiperboloide H; A', B', C' tres generatrices de un mismo sistema, del hiperboloide H'; P un punto cualquiera de la intersección de las superficies H, H'. Por P', se trazan las dos rectas que se apoyan respectivamente en pares de rectas (A, B'), (A', B): sea γ el plano que pasa por estas rectas. Se obtienen, de una manera análoga, otros dos planos α, β, combinando por una parte los pares (B, C'), (B', C), y por otra, los pares (A, B'), (A' B). Los planos α, β, γ pasan por una misma recta. *(J. Neuberg).*

6. Dada una parábola y un círculo de rádio R, descrito desde el foco como centro, se traza á este círculo una tangente cualquiera; hallar el lugar de las intersecciones de las normales á la parábola, trazadas por los puntos de intersección de la curva con esta tangente.

Discutir el lugar en el caso particular en que el círculo es tangente á la parábola.

(Lille. Concours académique, 1874).

* * *

405 (1). Dadas dos circunferencias, de las que una pasa por el centro de la otra, construir con el solo empleo de la regla:

1.º Los centros de dichas circunferencias. 2.º sus centros de semejanza. 3.º las tangentes comunes y sus puntos de contacto. *(Sollertinsky).*

(1) Estos dos últimos problemas han sido propuestos en el número del *Journ. de mathém élém,* correspondiente al més de Agosto.

407 Dos elipses iguales tienen el mismo centro y sus sus ejes mayores perpendiculares; P es un punto cualquiera de la primera, Q y Q′ los puntos de la segunda en que las tangentes son perpendiculares á OP, y M, M′ los puntos medios de PQ, PQ′.

Siendo *a* y *b* los semi-ejes de las elipses, demostrar que OMPM′ es un paralelógramo cuyos lados son

$$\frac{a+b}{2} \text{ y } \frac{a-b}{2},$$

y en el que las bisectrices de los ángulos tienen las direcciones de los ejes de las curvas. *(Laisant).*

***

Resolución del problema número 398 (1)

Sean las ecuaciones

$$(1) \quad y^2 = 2px\,, \qquad\qquad (2) \quad y - b = \frac{dy}{dx}(Y - a)$$

de la parábola referida á la tangente en su vértice y á su eje, y la de *la tangente que pasa por el punto M, cuyas coordenadas son a y b.*

Poniendo por $\frac{dy}{dx}$ su valor sacado de (1), igualando las coordinadas para hallar los puntos de tangencia, y eliminando x entre ambas, resulta

$$y^2 - 2by + 2ap = 0 \qquad (3)$$

que dará las dos soluciones; y examinando esta atentamente, obtendremos la solución buscada.

En efecto, la suma de las dos raíces es $2b$, las cuales por ser la (3) una ecuación de 2.º grado, serán de la forma $b + \alpha$, $b - \alpha$.

La figura manifiesta ahora que las dos raíces serán Am y Bm′, así como los valores de α embidos en ellas $An = \alpha$, $n'B = -\alpha$.

Siendo estos valores absolutos iguales, es evidente que si trazamos AB″ paralela á MB hasta cortar á MB″, paralela al eje X, AB″ = MB.

Finalmente, de los dos triángulos semejantes A′MB′, MAB″ resulta

$$\frac{MA'}{MB'} = \frac{MA}{AB''\,MB} \quad \text{L. q. q. d} \qquad \text{(N. U.)}$$

(1) Véase el número anterior.

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos