Año I Zaragoza 20 de Setiembre de 1891 Núm. 9.°

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

DÉVELOPPEMENTS SUR LES PARABOLES DE M. ARTZT [1]

PAR M. G. DE LONGCHAMPS

Dans deux articles publiés dans le Journal de Mathématiques élémentaires [2] et dans le Journal de Mathématiques Spéciales [3] nous avons mis en évidence quelques propiétés des paraboles sur lesquelles M. Artzt a, il y a quelques années, appelé l'attention des amis de la Géomètrie du triangle; paraboles qu'on désigne maintenant sous le nom de ce Géomètre.

Nous rappellerons d'abord leur définition.

Un triangle ABC étant donné, il existe une parabole P_a, bien déterminée, passant par les sommets B, C, tangentiellement aux cotés AB, AC. On peut ainsi, au triangle ABC, faire correspondre trois paraboles P_a, P_b, P_c; ce sont les paraboles de M. Artzt. Ces paraboles, ainsi associées au triangle ABC, jouissent de propiétés intéressantes et, en revenant ici sur l'étude à laquelle nous avons fait tout à l'heure allusion, nous nous proposons d'en signaler quelques unes. Mais pour donner à la Note présente tout son intérêt et surtout pour en faciliter la lecture, nous devons reproduire d'abord les résultats aux quels nous sommes arrivé dans les articles cités.

1. — Etablisons d'abord élémentairement l'expression du paramètre de la parabole P_a:

Théorême-Pour tout triangle ABC, *il existe une parabole* P_a *tangente*,

(1) L'article que M Artzt a fait paraître sur les paraboles remarquables du plan d'un triangle ne nous est pas connu.

Il est donc très possible que certaines résultats énoncés dans cette Note et même certaines démonstrations aient été déjà rencontrés par ce Géomètre.

(2) *Loc cit;* année 1890; p. 149.

(3) *Loc cit;* année 1890; p. 140.

aux points B, C, *aux côtès* AB, AC; *le demi-paramètre* P *de cette courbe est donné par la formule*

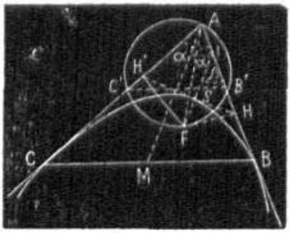


Fig. 1.ª

$$P = \frac{S^2}{m^3};$$

dans laquelle S *désigne l'aire de* ABC; m *la longueur de la médiane* AM *qui correspond au sommet* A (1) (fig. 1.ª).

Des propiétés connues prouvent que: 1° P_a passe par le milieu de AM 2° la tangente en ce point est la droite B'C' obtenue en joignant le milieu de AB, au milieu de AC; 3° le foyer F appartient au cercle circonscrit au triangle AB'C' (théorème de Lambert (2); 4° F appartient aussi à la symédiane du sommet A (théorème de Poncelet (3); 5° En projetant F sur les côtés AB, AC, on obtient deux points H, H'; HH' est la tangente au sommet.

Nous poserons

$$CAM = \alpha, \qquad MAB = \beta,$$

et nous désignerons par R le rayon du cercle circonscrit à ABC; R sera donc le diamètre du cercle circonscrit à AB'C'.

Le quadrilatère inscrit C'AB'F donne

$$B'C' . AF = B'F . AC' + C'F . AB',$$
$$\text{ou } AF \sin A = B'F \sin B + C'F \sin C.$$

On a,d' ailleurs $B'F = R \sin \alpha$, $C'F = R \sin \beta$;

et

$$(1) \qquad \frac{m}{\sin C} = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \qquad \frac{m}{\sin B} = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

(1) Ce théorème a été énoncé par M. Artzt en 1884, dans le *Programme scolaire du Gymnase de Recklinghausen*. Une démonstration en a été donnée par M. Brocard, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*; 1885, p. 124. Les formules indiquées (*loc. cit.*) son inéxactes. Elles ont été corrigées à la p. 240 du volume cité, mais incomplètement. Le facteur numérique de S2 est égal à 1, et non à 8.

Pour éviter toute confusion, il faut convenir que le *paramètre* d'une conique est la longueur de la demi corde focale qui est perpendiculaire à l'axe focal.

(2) *Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer de cette courbe.*

(3) *Les tangentes issues d'un point, à une conique. sont isogonales avec les droites qui vont du point considéré, aux deux foyers.*

De ces égalités, on conclut

$$AF \sin A = \frac{aR}{m} \sin B \sin C,$$

ou

$$(2) \qquad AF = \frac{2R^2}{m} \sin B \sin C.$$

Menons FI parallèle à AM : FI est l'axe de P_a; la projection de FH sur FI donne le sommet S de la parabole. On a donc

$$FS = \frac{p}{2}.$$

Il est facile d'obtenir, d'après cela, la valeur de p.

Le triangle AFI donne

$$FI = AF \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

ou, en tenant compte des égalités (1), (2),

$$FI = \frac{2R^2}{m} \sin^2 C = \frac{c^2}{2m}.$$

Mais $$FS = FH \sin \beta = FI \sin^2 \beta;$$

donc $$\frac{p}{2} = \frac{c^2 \sin \beta}{2m} = \frac{c^2}{2m} \frac{a^2 \sin^2 B}{4m^2} = \frac{S^2}{2m^3};$$

d'où, finalement, $$p = \frac{S^2}{m^3}.$$

2.—Un triangle ABC étant considéré, il existe une parabole P_a passant par les points B, C tangentiellement aux droites AB, AC. Soient P_b, P_c les deux paraboles analogues (fig. 2.ª) (1).

---

(1) A propos de ces paraboles outre les sources cités plus haut le lecteur pourra consulter:

Mathesis, 1884 (questions 341, 350); résolues 1885, p. 168 (avec une rectification, portant sur la seconde partie de la question 350).

Mémoires de l'Académie de Montpellier, 1886.

Nouvelles Annales, 1885, p. 211, § 4.

Les équations des paraboles P_b, P_c *(coordonnées barycentriques)* sont:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0, \qquad \gamma^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

Abstraction faite du point A, elles admettent un autre point réel A′; nous allons montrer que les tangentes, en A′, aux courbes P_b, P_c sont, respectivement parallèles aux medianes CM″, BM′. De cette remarque, nous déduirons les aires des triangles curvilignes formés par les paraboles considérées.

Les coordonnées α_o, β_o, γ_o du point A′, vérifient les égalités

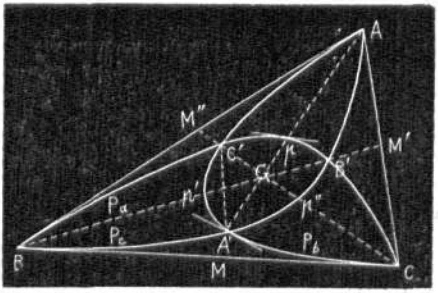


Fig. 2

$$4\alpha_o = \beta_o = \gamma_o.$$

La tangente à P_b, en A′, a pour équation

$$\beta\beta_o - 2\alpha\gamma_o - 2\gamma\alpha_o = 0,$$

ou

$$2\alpha - \beta + \frac{\gamma}{2} = 0.$$

On voit, sans peine (1), que la droite correspondante est parallèle à CM″, droite qui est représentée par l'équation

$$\alpha - \beta = 0.$$

Cette remarque conduit au théorème suivant:

Théorème.—*Les paraboles de M. Artzt se coupant deux à deux aux points* A′, B′, C′, *les aires des triangles curvilignes qu'elles déterminent sont données par les formules:*

$$\mathrm{AC'B'} = \mathrm{CA'B'} = \mathrm{BA'C'} = \frac{17}{81}\,\mathrm{ABC},$$

$$\mathrm{AC'B} = \mathrm{BA'C} = \mathrm{CB'A} = \frac{5}{81}\,\mathrm{ABC}.$$

---

(1) En coordonnées barycentriques, les équations

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0, \qquad m'\alpha + n'\beta + p'\gamma = 0,$$

représentent deux droites parallèles, si l'on a

$$\frac{m-n}{m'-n'} = \frac{n-p}{n'-p'}.$$

(Voyez, par exemple, le *Supplément* à notre *Cours de mathématiques spéciales*, 2.ᵉ édition, p. 168).

On sait que l'aire d'un segment parabolique est les $\frac{4}{3}$ de celle du triangle qui a pour base la corde du segment et pour sommet le point de l'arc le plus éloigné de cette corde.

Or, sur l'arc $AC'B'$, le point C', comme nous venons de le voir, est tel que la tangente en ce point est parallèle à AA'. On a donc

$$\textit{aire du segment } AC'A' = \frac{4}{3}\, AC'A'.$$

On sait d'ailleurs, ou l'on vérifie sans peine, que

$$CC' = 8\, M'C'.$$

D'après cela:

$$AC'G = \frac{1}{9}\, ABC, \qquad A'C'G = \frac{1}{27} ABC;$$

et, par suite,

$$A'C'A' = \frac{4}{27}\, ABC.$$

On voit aussi que

$$\textit{aire du segment } AC'A' = \frac{16}{81}\, ABC$$

De même, *aire du segment* $AB'A' = \frac{16}{81}\, ABC$

Ces égalités donnent

$$\textit{aire } AC'A'B' = \frac{32}{81}\, ABC. \tag{1}$$

Mais on sait [1] que

$$\textit{aire } A'C'B' = \frac{5}{27}\, ABC. \tag{2}$$

(1) Voyez *Mathesis (loc. cit.)* La proposition en question se démontre très simplement en observant que la parabole de M. Artzt, correspondant au côté BG, passe par le point μ, milieu de AM et que la tangente en ce point est parallèle à BC et, par suite, à $B'C'$.

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\textit{aire}\ \mathrm{AC'B'} = \frac{17}{81}\,\mathrm{ABC}.$$

Enfin, les trois triangles formés par les côtés de ABC et par les arcs de parabole étant équivalents [1], on a

$$3\ \textit{fois aire}\ \mathrm{AC'B} + 3\ \textit{fois aire}\ \mathrm{AC'B'} + \textit{aire}\ \mathrm{A'B'C'} = \mathrm{ABC};$$

ou, finalement,
$$\textit{aire}\ \mathrm{AC'B} = \frac{5}{81}\,\mathrm{ABC}.$$

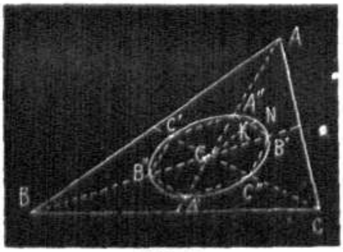


Fig. 1.ª

3.—Les paraboles de M. Artzt mettent en lumière une certaine ellipse U, du plan du triangle; cette ellipse passe par les points *réels* comuns à ces trois paraboles; en outre, son centre coïncide avec le centre de gravité G du triangle. Les dimensions de cette ellipse peuvent être déterminées comme nous allons l'indiquer.

Si, par C′, on mène une parallèle à la médiane BB′, cette droite coupe AA′ en un point A″, symétrique de A′ par rapport à G [2]. L'ellipse que nous considérons est donc, d'après cette remarque, circonscrite à un hexagone H (A′B′C′ A″B″C″), dont les côtés sont parallèles aux diagonales (fig. 3.ª).

En considérant ABC comme la projection orthogonale d'un triangle équilatéral, on voit que U est la projection d'une circonférence U′ circonscrite à un hexagone régulier H′, correspondant à H.

---

(1) Pour le montrer, il suffit de considérer le triangle proposé comme la projection orthogonale d'un triangle équilatéral convenablement choisi.

(2) On vérifie facilement cette propriété en observant que (C′ étant le centre de gravité de AGB) BC′ passé par le milieu de AG.

Appelons ρ le rayon de cette circonférence.

Soient α, β les demi-axes de U; on a

$$\frac{\pi\alpha\beta}{\pi\rho^2} = \frac{\textit{aire}\ \mathrm{H}'}{6\rho^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

ou

$$\alpha\beta = \frac{2}{3\sqrt{3}}\textit{aire}\ \mathrm{H}'.$$

En observant que

$$\textit{aire}\ \mathrm{H}' = 6\ \textit{fois aire}\ \mathrm{C'GA''} = 6.\frac{2}{27}\mathrm{ABC} = \frac{4}{9}\mathrm{ABC},$$

on a

$$(1) \qquad \alpha\beta = \frac{8}{27\sqrt{3}}.\ \mathrm{ABC}.$$

Pour déterminer α, β, cherchons maintenant l'expression de $\alpha^2 + \beta^2$.

Soit K le milieu de A''B'; GK rencontre U en N, et l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = \overline{\mathrm{C'G}}^2 + \overline{\mathrm{GN}}^2.$$

Mais, en se reportant à la circonférence U', envisagée ci-dessus, on voit que

$$\frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{GK}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On a donc $\qquad \alpha^2 + \beta^2 = \overline{\mathrm{C'G}}^2 + \frac{4}{3}\overline{\mathrm{GK}}^2.$

Un calcul facile donne, finalement,

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{81}.$$

Les formules (1) et (2) font conaître les dimensions de l'ellipse U (1); ellipse déterminée par son centre qui, comme on l'a vu,

---

(1) Sauf erreur dans le calcul que nous avons fait, l'équation de cette ellipse remarquable, en coordonnées barycentriques, est

$$8(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 11\,(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha).$$

coïncide avec le centre de gravité G du triangle ABC et par trois points, centres de gravité des triangles GAB, GBC, GCA.

4—L'etude que l'on peut faire des paraboles de M. Artzt porte sur d'autres parties que celles que nous avons signalées jusqu' ici. C'est ainsi, pour ne citer que les éléments les plus essentiels à cette étude, qu' on peut demander les coordonnés du foyer, l'équation de l'axe, celle de la tangente au sommet, etc..... Nous nous proposons de déterminer, en finissant cette Note, ces diverses relations: il sera facile ensuite d' en déduire de nombreuses conséquences: nous laissons ce soin aux lecteurs que ce sujet pourra intéresser.

5.—*Coordonnées barycentriques du foyer de la parabole* P_a.

Nous avons observé plus haut (fig 1) que le foyer F de P_a était situé sur la circonference AB'C' et sur la symédianeAF.

Cherchons d' abord l'équation de la circonférence AB'C' (1) Nous avons indiqué (*Supplement* 2e edn p. 170) pour l'équation générale des cercles en coordonées barycentriques, la formule (2):

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(\alpha + \beta + \gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = o.$$

En exprimant que la circonférence correspondaute passe par le sommet A et par les milieux des cotés AB, AC, on a

$$\frac{1}{2}(c^2\beta + b^2\gamma)(\alpha + \beta + \gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - b^2\alpha\beta = o. \qquad (1)$$

D'autre part, la symédiane correspondant au sommet A a pour équation

$$\frac{\alpha}{b^2} = \frac{\beta}{c^2} \qquad (2)$$

Les équations (1) (2) font connâitre les coordonnées du foyer de P_a et l'on trouve, par un calcul facile,

$$\text{(A)} \qquad \frac{\alpha}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2} \qquad (\text{Foyer de } P_a)$$

(Se concluirá)

(1) Le lecteur peu au courant des coordonées barycentriques, coordonées si particulièrement utiles dans l'étude de la Géométrie du triangle, trouveront *(loc cit)* les développements nécessaires concernant ces coordonnées.

(2) Dans cette équation, α, β, γ sont les coordonnées barycentriques courantes, u, v, w designent trois paramètres arbitraires (puissances des sommets du triangle de référence par rapport à la circonférence considérée; a, b, c sont les longueurs des cotés du triangle de référence.

EL RACIOCINIO A MAQUINA

POR

D. VENTURA REYES PRÓSPER

CATEDRÁTICO DEL INSTITUTO DE TERUEL

La rica herencia de Aristóteles se halla hoy en poder de los que un tiempo llamó con desdén el pueblo latino bárbaros del septentrión. A los hombres de raza anglo-sajona se deben los nuevos y fecundos derroteros que en nuestro siglo ha tomado la Lógica deductiva é inductiva, que dejando bajo su impulso, de ser un estudio soporífero, promete dar en breve al mundo la *Pasigrafía* Universal.

La Lógica simbólica, á pesar de los trabajos de Bernouilli, Lambert, Holland, Darjes, Ploucquet Semler, Segner y otros, no puede decirse que ha nacido hasta los días de George Boole, el ilustre Profesor de la Universidad de Dublin. En su obra gigantesca le han auxiliado en Inglaterra; Agustus de Morgan, Stanley Jevons; Mac-Coll, Venn, Murfhy, Mac-Farlane, Kempe, Elízabeth Blacwood y otros. En Alemania se han distinguido, sobre todo en este estudio, Robert Grassmann, hermano del insigne geómetra Hermann Grassmann, Ernst Schröder, el sapientísimo Profesor de Karlsruhe, autor de una monumental obra que traduzco, con su benévola autorización al castellano, cuyos méritos ante la Ciencia son inmensos, y Andreas Voigt de Freiburg. En los Estados-Unidos del Norte de América se nos presenta la escuela americana de tan utilísimas é ingeniosas iniciativas, constituída por Charles Santiago Peirce, Maestro venerable á cuyo alrededor se agrupaban el difunto Howard Mitchell, la simpática figura de Christine Ladd Franklin, Gilman y Allan Marquand, habiéndose también distinguido George Bruce Halsted, el bibliógrafo de la Geometría No-Euclídea, Profesor de la Universidad del Estado de Texas.

En lenguas neolatinas solo existen, á lo que creo, los trabajos del Sr. Delboeuf, los muy notables del Sr. Peano y los que en la actualidad publica un sabio Profesor, italiano también, el Sr. Nagy, á cuya exquisita amabilidad debo la lectura de sus muy interesantes publicaciones que promete continuar. Espero que los trabajos de Poretzki difundan entre las razas eslavas el gusto por estos estudios.

Mas no solo la Ciencia ha hallado el modo de seguir mediante ecuaciones, subsumciones, exclusiones etc. el raciocinio, llegando por medio del cálculo á sacar todas las posibles conclusiones de un sistema dado de premisas; aun ha hecho algo que siendo de secundaria importancia, aparece á primera vista como mucho más sorprendente.

Cuenta el Deán Swift en sus viajes de Gulliver á países remotos, que los sabios de Laputa poseían una máquina con la que el más inepto podía discurrir sobre todas las Ciencias, en lo que se cree aludía con su habitual malicia á las obras de Aristóteles ó del Canciller Bacon llamadas *Organum*, si ya no es que indicaba burlescamente las máquinas calculadoras de Pascal y Leibnitz.

Pues bien, el sueño de Swift ha sido una profecía, y la Lógica posee hoy una serie de aparatitos desde los sencillos cartones de Cuninghame hasta la ingeniosa y complicada máquina de Allan-Marquand, que permiten raciocinar á máquina tan correctamente como el más privilegiado cerebro lo hiciera. Es posible tocando un teclado hacer silogismos, por más extraño que esto parezca. Los trabajos hechos hasta la actualidad se limitan á problemas lógicos en que solo entran á lo más seis ú ocho letras, mas posible es que algún día se encuentre el Jacquard lógico de que habla Peirce, y resolviendo el problema de que tratamos, admire al mundo con asombroso mecanismo en que rápidamente se resuelvan las más complicadas cuestiones de la Dialéctica.

Vamos á pasar una ligerísima revista á los mecanismos ideados, empezando por el más simple y sencillo de todos, que sólo como una curiosidad (no siendo propiamente máquina) puede citarse, los cartones silogísticos de Henry Cuninghame. La descripción detallada de ellos la encontrará el lector en la obra de Jevons que al final se cita. Como su nombre suficientemente indica, consisten en una colección de cartones que permiten obtener la conclusión de dos premisas dadas. Esto se consigue mediante superposición de unos cartones sobre otros, con lo que por una abertura rectangular del cartón que se coloca encima, aparece en el de abajo la conclusión deseada. Adaptando los cartones sobre un cilindro, se obtiene el cilindro lógico, que solo es una modificación insignificante del anterior sistema.

La primera descripción de una verdera máquina lógica es la del difunto profesor Stanley Jevons. Esta máquina recibe las premisas en forma de ecuaciones lógicas ó igualdades, y moliéndolas por decirlo así lo mismo que el trigo en el molino, produce, mediante su manejo, las conclusiones pedidas. Pero solo se limita á cuatro letras y su generalización para un número mayor sería muy difícil.

De igual defecto adolece el ingenioso mecanismo descrito en 1880 por el proferor Venn del colegio Caius en Cambridge, pues que descansando sobre la presentacion diagramática de las proposiciones ideada por él, la cual no puede extenderse á más de cuatro clases (que se representan por elipses), tampoco puede ir más allá.

La pequeña máquina ideada por el Sr. Allan Marquand para producir variaciones silogísticas, aunque ingeniosa, solo sirve para el limitado objeto que entonces se propuso su autor.

Más duranse el invierno de 1881-82 había ideado el Sr. Marquand una lindísima máquina que fué construida con auxilio de los grandes talentos mecánicos del Profesor C. J. Rockivood. Lo notable de este mecanismo es que fácilmente podría extenderse á más de cuatro letras, lo que le da una gran superioridad sobre sus similares. Está fundada en la teorías de Howard Mitchell y Christini Ladd Franklin. Las premisas se escriben en forma de subsunciones en que el predicado es 0, lo que fácilmente se consigue con los métodos de Peirce y su escuela.

La máquina, construida de un poste de cedro, mide 32 cm. de alto, 21 de largo y 15 de ancho. Tal como está construida, sirve solo para cuatro letras á las que en unión de sus negativas, designadas por las minúsculas respectivas, corresponden ocho teclitas, una para cada una.

Hay además otras dos teclas que llevan escrito encima la una la unidad y la otra el 0. La primera de éstas se denomina tecla regenerativa, pues sirve para poner el aparato en disposición de funcionar de modo que indique que ninguna premisa se halla aún establecida. La segunda se denomina tecla destructiva, pues sirve para ir expresando las diferentes premisas introducidas en forma de imposibilidades lógicas.

En el frente de la máquina hay diez y seis manecillas dispuestas en cuadro, que cuando el aparato no ha funcionado aún, deben estar horizontales y que van cayendo á la posición vertical á medida que se introducen premisas. A cada una de las manecillas corresponde una de las diez y seis agrupaciones lógicas que con las cuatro letras y sus negativas se pueden formar, y puede saberse con ahorro de letras á cuál corresponde, por un ingenioso artificio.

Supongamos ahora que se quiere hacer funcionar el aparato. Lo primero es poner todas las manecillas horizontales, para lo que se bajan las teclas 0 y 1. Para expresar luego las diferentes subsunciones, se van tocando las teclas correspondientes á las letras de cada agrupación de las que hay que destruir, y luego la tecla destructiva. La conclusión final puede ser expresada por la suma lógica de las agrupaciones representadas por las manecillas que al final de la operación han quedado horizontales.

Tal es el estado actual de las cosas con respecto á los mecanismos raciocinadores. Pueda pronto la Ciencia simplificar y generalizar los aparatos de que hoy dispone, lo que no podrá menos de dar atractivo á sus admirables progresos y vulgarizar sus inesperados resultados. ¡Ojalá este artículo despierte la curiosidad de nuestro público científico hácia una disciplina matemática tan hermosa como el Álgebra de la Lógica!

Madrid y Agosto 1891.

SOBRE UNA ESCUADRA CICLOIDAL
PROPIA PARA EFECTUAR LA RECTIFICACIÓN DE LOS ARCOS DE CÍRCULO

POR D RODOLPHO GUIMARAES (1)

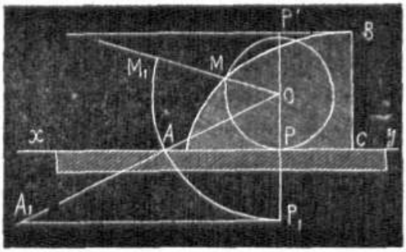


Fig. 4.

Sea AMB un arco cicloide (figura 10). Si PMP' es una posición de su círculo generador, se sabe que el arco PM = PA. Supongamos pues, que se haya cortado en una materia cualquiera la escuadra ACB que tenga por lado AB la plantilla de la cicloide. Colocada una regla á lo largo de la tangente xy trazada al círculo O por el punto P, bastará con hacer resbalar el borde AC de la escuadra á lo largo de esta regla, hasta que el lado curvilíneo AB pase por el punto M, para tener AP = arc. MP.

Si el arco que se ha de rectificar M_1P_1 tiene un radio diferente de OP, basta trazar el arco concéntrico MP de igual abertura y, después de haberlo rectificado en PA, tomar el punto de intersección A_1 de OA y de la tangente su P_1 al arco primitivo.

La escuadra cicloidal ABC permite pues, permite reducir los diversos problemas que puedan proponerse sobe la evaluación de las longitudes y la división de los arcos á los mismos problemas efectuados sobre segmentos de rectas.

(1) Tenemos la satisfacción de reproducir, traduciéndo del *Bulletin de la Société mathématique de France* t. XIX; 1891, el procedimiento, debido al ilustrado oficial de ingenieros portugués Sr. Guimaraes.

En particular, la inscripción de los polígonos regulares en el círculo es muy sencilla por este medio.

El problema de la *división de los ángulos, reduciéndose* al de la división de los arcos, obtiene al mismo tiempo una solución.

NOTA SOBRE UN LUGAR GEOMÉTRICO

En el número 4.º de este periódico, páginas 86-88, se publicó una interesante nota referente á una Memoria que con el título de *Estudio de un lugar geométrico de cuarto orden,* publicó el ilustrado doctor Sr. Ruiz-Castizo Ariza. Este trabajo y la nota que de él da cuenta tiene por principal objeto discutir la forma y particularidades que ofrece el lugar geométrico engendrado por el punto medio de una recta de longitud constante p que se apoya por uno de sus extremos sobre una recta y por otra sobre una circunferencia de radio r, de tal modo, que la longitud p sea igual á la mayor distancia entre la circunferencia y la recta fija, medida sobre la normal á ésta que pasa por el centro de la circunferencia.

Hoy tenemos la satisfacción de ofrecer á los lectores de EL PROGRESO MATEMÁTICO otra importante Nota que acerca de un asunto muy semejante nos ha sido remitida, y que fué publicada por su autor el año 1870 en el *Journal de mathématiques spéciales de Montpellier,* pues para mostrar la gran generalidad de los resultados á que conduce esta cuestión, de la cual ha hecho á su vez el Sr. Castizo Ariza un estudio profundo y detallado, hace además referencia á la idea de combinar las ordenadas de dos elipses para representar el lugar geométrico de un punto *cualquiera* de una biela que se apoya en una circunferencia y en una recta *cualquiera,* que ya aplicó el comunicante en su curso de mecánica práctica.

En fin, reproducimos unas cuantas figuras presentadas por el autor del artículo como una mera indicación de tipos de curvas correspondientes á la cuestión, haciendo una rectificación en una de ellas, á instancias del autor, que observa se halla perfectamente representada en el artículo referente á la Memoria del Sr. Castizo Ariza.

QUESTION NUM. 58 PAR UN ABONNÉ

Une droite de longueur constante l s'appuie par ses extrémités A et B sur une circonférence OA et sur une droite BD données de position dans un plan. *Trouver le lieu d'un point M de la droite mobile.* Montrer qu'il est possible de transformer ce mode de génération en un autre qui indique, d'une manière immédiate et très simple, toutes les formes que la courbe peut affecter (n.º 9. p. 14).

Prenons pour origine le centre O du cercle, pour axe des x la perpendiculaire OD à BD. Posons $\mathrm{AM} = b$, $\mathrm{OD} = d$, $\mathrm{OA} = a$, $\angle \mathrm{AOP} = u$, $\angle \mathrm{MAH} = \theta$. Nous aurons à éliminer u et θ entre les 3 équations

$$x = a \cos u + b \cos \theta,\ y = a \operatorname{sen} u + b \operatorname{sen} \theta,\ d = a \cos u + l \cos \theta.$$

Cette élimination conduit à l'équation

$$y = \frac{\sqrt{a^2(l-b)^2 - (db - lx)^2}}{l-b} = \frac{b}{l-b}\sqrt{(l-b)^2 + (x-d)^2}$$

On voit que l'ordonnée d'un point quelconque du lieu est la somme algébrique des ordonnées de 2 ellipses qui ont pour équations

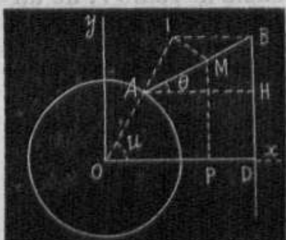


Fig. 5.ª

$$y = \frac{1}{l-b}\sqrt{d^2(l-b)^2 - (db - lx)^2}$$

$$y = \frac{b}{l-b}\sqrt{(l-b)^2 - (x-d)^2}$$

Ces ellipses ont leur grand axe sur Ox. Leurs centres ont pour abscisses

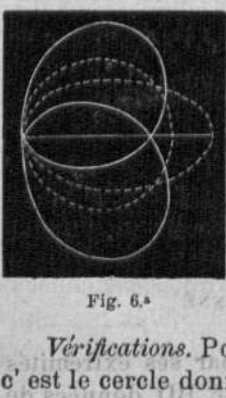


Fig. 6.ª

$$x = \frac{db}{l} \quad \text{et} \quad x = d.$$

Les cercles qui leur ont donné naissance ont respectivement pour équations

$$l^2 y^2 = a^2(l-b)^2 - (db - lx)^2$$
$$y^2 = (l-b)^2 - (x-d)^2.$$

Vérifications. Pour $l = d - a$, on a $x = b + a$. Si $b = o$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$: c'est le cercle donné. Si $b = l$, $x = d$. Si $d = o$, BD se confond avec

Oy. On sait que dans ce cas le lieu du point M est une ellipse, car $OA + AB = c^{te} = l + a$. L' équation du lieu devient en effet

$$y = \frac{a+b}{l-b}\sqrt{(l-b)^2 - x^2}.$$

On peut construire la normale à la courbe au point M par la considération des centres instantanés. Cette normale passe par l' intersection I de OA prolongé et de BI perpendiculaire à BD.

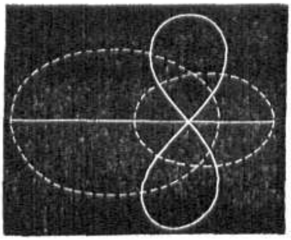


Fig. 7.ª

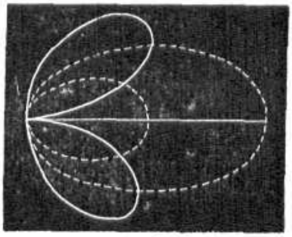


Fig. 8.ª

De ce qui précède résulte une discussion très simple de toutes les formes que le lieu du point M peut affecter. Nous nous contentons de les figurer ci-après, en même temps que les ellipses auxiliaires.

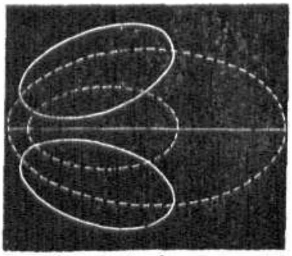


Fig. 9.ª

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

Desde hace pocos años una nueva rama ha principiado á desarrollarse con vigoroso impulso entre las múltiples ramificaciones de la Geometría. Un nuevo y al parecer inagotable filón por esplotar se ofrece á las inteligencias, que seguramente ha de enriquecer los ya vastísimos dominios de la ciencia de la extensión.

Difícil es hacer un trabajo completo y sistemático de lo que ha sido y está siendo resultado de numerosos esfuerzos realizados por asociaciones como la *Société mathématique de France* y después por la actual *Asociation française pour l'avancement des sciences* fusionada á la anterior, que anualmente sigue publicando en su *Bulletin* los resultados de los varios Congresos habidos en diversas ciudades de Francia, esfuerzos proseguidos con loable insistencia por periódicos como *Mathesis*, el *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, *The Educational Times*, *Archives der Physik und Mathematik* de Grunert-Hoppe, etc., por individualidades tan notoriamente conocidas como los fundadores de este nuevo desenvolvimiento científico, señores Lemoine y Brocard. El Sr. Neuberg á quien cabe la gloria de haberles dado señalado impulso con otros importantes descubrimientos, el ilustre profesor de la Universidad de Dublin Dr. Casey con cuya muerte acaecida al comenzar este año, ha perdido la Geometría reciente, uno de los más distinguidos propagandistas, habiendo publicado en su obra *A sequel to Euclid* un *Tratado de Geometría elemental reciente* (1), que forma un capítulo suplementario de dicha obra, y en sus tratados de Geometría analítica y de trigonometría numerosas cuestiones de dicha nueva rama geométrica, habiéndose comenzado á formar así con estos preciosos materiales esparcidos en innumerables memorias un cuerpo de doctrina ú organismo didáctico.

Citar nombres como los de los Sres. Mathieu, Tücker, Artzt, Lonchamps, etc., que van frecuentemente unidos á los variadísimos y múltiples elementos que constituyen por su sólido engranaje esta nueva Geometría, fuera adelantar por el momento lo que iremos haciendo más pausada y detalladamente en nuestra escursión por estos dominios cuyas ramificaciones son tantas, que á los nombres de los ilustres geómetras consagrados á hacer fructificar directamente tan fecundos conceptos como los en que estriba la Geometría del triángulo, y que se irán citando en el curso de este trabajo, hay que agregar los de otras celebridades de la ciencia como el Sr. Cayley por su escrito *A memoir on the rational transformation between two spaces*, el Sr. Cremona por su *Mota intorno ad alcuni teoremi di Geometria segmentaria* y *Sulle transformationi razionali nello spazio, etc.*, y anteriormente Simson, Crelle y Steiner han señalado de una manera incidental algunos puntos capitales ó de cierta importancia que hoy

(1) En el n.° 4 de este periódico se hicieron indicaciones de la traducción hecha al francés por M. Falisse.

se hallan incluidos en este nuevo dominio de la Geometria, ó se refieren en cierto modo al mismo.

Comenzando á entrar en materia, observaremos desde luego que los primeros vestigios de este especial conjunto de proposiciones geométricas, hoy agrupadas bajo las denominaciones de *Geometría del triángulo* ó *Geometría reciente* se encuentran, como indica el ilustrado cronista de esta Geometría, M. Vigarié: 1.º en un escrito de Simon Lhuilier (*Eléments d' Analyse géométrique et d' Analyse algébrique* 1809, p. 296), donde trata del punto tal, que la suma de los cuadrados de las distancias á los lados del triángulo y á las caras del tetraedro sea mínima (*punto de Lemoine*). 2.º En una obra de Crelle donde se estudia cierto punto del plano de un triángulo (*punto de Brocard*), y se exponen las fundamentales fórmulas

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C;$$

3.º en un trabajo de E. W. Grebe (*Arch. de Grunert*, 1847) donde se da la expresión

$$m = \frac{2S}{\cot A + \cot B + \cot C}$$

para las coordenadas normales de cierto punto. 4.º en la obra de M. Catalan (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*) donde se resuelve el problema: *Hallar un punto M tal, que la suma de los cuadrados de sus distancias á los tres lados de un triángulo sea un mínimo*, punto que es el centro de las distancias medias del triángulo PQR cuyos vértices son los pies de las perpendiculares bajadas desde dicho punto á los lados del ABC, ó sea el *triángulo podar*, no siendo ésta la única cuestion que se trata en dicha obra concerniente á la Geometría del triángulo. 5.º En un trabajo de Hoffmann (Arch. de Grunert, 1847) en el cual se propone hallar dos puntos Ω, Ω' (*puntos de Brocard*) tales que

$$\angle \Omega AC = \angle \Omega BA = \angle \Omega CA = \omega = \angle \Omega' AB = \angle \Omega' BC = \angle \Omega' CA.$$

Pero, como manifiesta M. Vigarié (*Esquisse historique sur la marche du développement de la Géométrie du triangle.* —Assoc. franç.—1889), hasta el año 1873 sólo se encontraba una multitud de propiedades aisladas, poco conocidas ú olvidadas, y el punto de partida de esta nueva evolución de la Geometría, que ha excitado el interés y la actividad de los geómetras de diversos paises, se halla en los descubrimientos de MM. Lemoine y Brocard.

Las dos primeras memorias de M. Lemoine donde se encuentra la amplia base sobre la que después se ha desarrollado la Geometría del triángulo son: *Sur quelques propriétés d'un point remarquable d'un triangle* (Assoc. franç.—Congrès de Lyon. 1873), *Note sur les propriétés du centre des médianes antiparallèles dans un triangle* (Assoc. franç.-Congrès de Lille. 1874).

En la primera define lo que llama *mediana antiparalela,* es decir, la recta que une el vértice de un ángulo del triángulo con los puntos medios de las antiparalelas respecto á dicho ángulo, así como el *centro de las medianas antiparalelas* (después llamado *punto de Lemoine,* según propuso M. Neuberg que es el punto ω de intersección de las tres medianas antiparalelas de un triángulo)·

Considera enseguida en el plano de un triángulo un punto O por el que se trazan paralelas á los lados de aquél y que los cortan en seis puntos 1, 4; 2, 5; 3, 6, vértices de un exágono inscriptible en una cónica

Después de indicar á qué posición del punto O corresponde una elipse, una hipérbola ó una parábola, observa que en el caso de confundirse con el punto ω, los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 pertenecen á una circunferencia (que después se llamó *primer círculo de Lemoine),* siendo las cuerdas que los lados determinan en ésta proporcionales á los cubos de los lados del triángulo á que pertenecen dichas cuerdas, y hallándose el centro de la circunferencia en el punto medio de la recta que une el centro de las medianas antiparalelas con el centro de la circunferencia circunscrita.

Pero además, cuando el punto O se confunde con el ω, las longitudes 12, 34, 56 son iguales, y las rectas 12, 34, 56 son antiparalelas á las BC, CA, AB, con respecto á los ángulos CAB, CBA, ACB [1]; y si por el punto ω se trazan antiparalelas á los tres lados, los segmentos de estas rectas comprendidos entre los lados del triángulo son iguales, y se hallan divididos en dos partes iguales por el punto ω [2], estando expresada la longitud comun de las tres por

$$2\frac{abc}{a^2+b^2+c^2} \quad (3)$$

(1) Véase en la pág. 80 de este periódico.

(2) En este caso resulta otro círculo que se denomina *segundo círculo de Lemoine.*

(3) Esta fórmula es la deducida en el corolario de la pág. 78, pues si en fig. 5.ª de la lámina 3.ª se traza por K la paralela MN á EF, evidentemente dividida en dos partes iguales por K, se tiene KN= z: *sen* ANM= z: *sen* C, y además 2S= *ab sen* C.

Siendo l_a longitud de la recta que une el punto A al medio de BC; si a, b, c son las longitudes de los tres lados BC, AC, AB del triángulo y α el punto de intersección de la recta Aω con BC, se tiene.

$$A\alpha = \frac{bc}{b^2+c^2} l_a.$$

Además el punto α es tal, que:

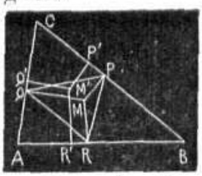
$$\frac{C\alpha}{\alpha B} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{BA}^2}$$

De esto concluye M. Lemoine que según un teorema de M. Hossard el punto ω es el punto estudiado por un gran número de geómetras para el que la suma de los cuadrados de las perpendiculares bajadas sobre los tres lados del triángulo es un mínimo.

Después de exponer un procedimiento para determinar dicho punto, expone M. Lemoine nuevas propiedades en la 1.ª de las Memorias arriba citadas de la que nos estamos ocupando.

Si por por A, B, C se trazan las perpendiculares $\alpha'\gamma'$, $\alpha'\beta'$, $\gamma'\beta'$ á AC, AB, BC, y las perpendiculares $\alpha''\beta''$, $\beta''\gamma''$, $\alpha''\gamma''$ á AB, CB, AC, las rectas $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ pasan por el cento del círculo circunscrito de ABC, los tres puntos A_1, B_1, C_1 en que estas rectas cortan á BC, AC y AB se hallan en línea recta, y si α, β, γ son los conjugados armonicos de A_1, B_1, C_1 con relación á BC, AC, AB, las tres rectas Aα, Bβ, Cγ se cortan en el punto ω, *centro de las medianas antiparalelas* (que como se dijo ya se llama *punto de Lemoine*).

Antes de tratar de la segunda memoria arriba citada, presentaremos algunas demostraciones que, si bien son demasiado sencillas y podríamos omitir, no dejan de tener importancia, tratándose de ir fijando las proposiciones fundamentales de la Geometría del triángulo.



Principiaremos por indicar la demostración del problema:

XLIX (livr. III) (1): *Hallar un punto* M *tal, que la suma de sus distancias á tres puntos dados* A, B, C *sea un mínimo.*

Suponiendo que sea M dicho punto, para otro punto cualquiera se tendrá

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MN}^2 < \overline{M'P'}^2 + \overline{M'Q'}^2 + \overline{M'N'}^2 < \overline{M'P}^2 + \overline{M'Q}^2 + \overline{M'N}^2.$$

(1) *Théorèmes et problèmes de Geom. élém. par E. Catalan*, dixième edition, 1879.

Por consiguiente, el punto M es tal, que *la suma de los cuadrados de sus distancias á los puntos* P, Q, R *es un mínimo*, y por consiguiente, *el centro de las distancias medias del triángulo* PQR [1].

Además; si se trata CM, siendo C' su intersección con AC y las distancias C'D y C'E á AC y BC, así como la altura CI del triángulo y las perpendiculares QF y PG á MR prolongadas, de los triángulos semejantes que se forman, resulta:

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{C'D}{C'E}, \quad \frac{QM}{PM} = \frac{AC}{BC}, \text{ y en fin, } \frac{AC'}{BC'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$$

por ser C'D, C'E proporcionales á MQ, MP, quedando demostrado que: *las distancias del punto* M *á los lados del triángulo son proporcionales á estos lados* [2], *y que la recta trazada por el punto* M *y uno de los vértices divide al lado opuesto en segmentos proporcionales á los cuadrados de los lados adyacentes.*

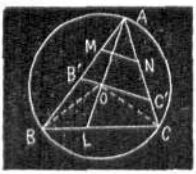


fig.

Vamos á demostrar ahora que: *La recta* DO *que une un vértice del triángulo* A B C *al centro* O *del círculo circunscrito es perpendicular á las antiparalelas con la base* BC *respecto al ángulo* A.

Siendo isósceles los tres triángulos formados en O, los $\angle^s$ ADC' y ADB' serán iguales como suplementos de $\angle OAC + OC'A = \angle OAC + \angle ABO + \angle OBC$ y de $\angle OAB + \angle AB'O = \angle OAB + \angle ACO + \angle ACB$.

Tambien se puede probar fácilmente que: *El punto medio de la recta* KO (lám. 3.ª fig. 6.ª) *que une el punto de Lemoine con el centro del círculo que pasa por los puntos* D, D', E, E', F, F', pues si se une el punto medio de E'F, por ejemplo, al punto medio de KO, la recta que los una será paralela á la AO, y por consiguiente perpendicular á E'F en su punto medio, y lo mismo podrá deducirse para la ED', etc.

(Se continuará)

Z. G. DE GALDEANO.

(1) Esto resulta del teorema: *La suma de los cuadrados de las distancias de* n *puntos* A, B, C,..... *á un punto cualquiera* S, *es igual á la suma de los cuadrados de las distancias de estos mismos puntos á su centro* O *de las distancias medias, aumentando en* n *veces el cuadrado de* SO. (Véase *A sequel to Euclid*, pág. 25).

(2) En la pág. 78 se expuso la demostración tomada de la obra del profesor Casey *A sequel to Euclid* ó de la traducción de M. Falisse de que se dió cuenta en el núm. 4.º de este periódico.

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS INTEGRALES EULERIANAS

POR

D. LAURO CLARIANA Y RICART

Catedrático de la Universidad de Barcelona

1.—OBJETO DE ESTA MEMORIA.

Siendo las integrales eulerianas una de las ramas del análisis que más ha llamado la atención de los matemáticos modernos; y ya que estos conocimientos se encuentran por separado en diferentes obras, revistas, folletos, etc., esperamos que la idea de procurar, con la mayor claridad posible, un resumen de esta bella teoría, será aceptada con gusto por nuestros lectores.

Antes de dar comienzo á dicho estudio, presentaremos algunos principios y fórmulas que han de sernos útiles en la teoría que tratamos de exponer.

2.—Gauss llama cantidad compleja á la que se halla expresada por $x+yi$, siendo x é y cantidades reales; y da el nombre de imaginaria á la cantidad $x+yi$. Esta última expresión es la más general de la cantidad, y de ella se deduce la cantidad real, suponiendo $y=o$. Si x é y son variables, la expresión $x+yi$ constituye una variable imaginaria; la representación gráfica de la imaginaria corresponde al punto cuyas coordenadas son x é y. Así pueden obtenerse tantos valores como se quieran bajo la forma $x+yi$ correspondientes á los diferentes puntos de un plano.

La forma de las cantidades imaginarias puede modificarse al referirse á ejes polares. Así resulta:

$$z=\rho(\cos\varphi+i \operatorname{son}\varphi), \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

en el concepto de ser ρ la distancia del punto imaginario al polo, cuya distancia se llama módulo; φ el argumento que mide el ángulo del módulo con el eje polar, y $\cos\varphi+i \sin\varphi$ el coeficiente de inclinación.

Por fin, se dice que una variable imaginaria ó compleja es contínua, cuando x é y varían de una manera contínua.

3.—CONDICIONES Á QUE DEBE SUJETARSE UNA FUNCIÓN COMPLEJA PARA ADMITIR UNA DERIVADA ÚNICA Y DETERMINADA.

Cuando $x+yi$ describe una curva, debe entenderse que el punto cuyas coordenadas son x é y traza dicha curva. Ahora bien, si $X+Yi$ es función de $x+yi$, esta expresión admitirá una derivada única y bien determinada, ó independiente de los valores arbitrarios que van tomando x é y al acercarse á un punto dado, si se sujeta á las condiciones que vamos á determinar

Según los principios generales del análisis, puede escribirse como expresión de la derivada

$$\frac{dX + i\,dY}{dx + i\,dy} = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\,dx + \frac{dX}{dy}\,dy\right) + \left(\frac{dY}{dx}\,dx + \frac{dY}{dy}\,dy\right)i}{dx + i\,dy}$$

$$= \frac{\left(\frac{dX}{dx} + i\,\frac{dY}{dx}\right) + \left(\frac{dX}{dy} + i\,\frac{dY}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\,\frac{dy}{dx}}$$

Para que esta derivada resulte independiente de los valores que que va tomando $\frac{dy}{dx}$, ó sea de la dirección que toma la variable al acercarse al punto considerado, basta supones

$$\frac{\frac{dX}{dx} + i\,\frac{dY}{dx}}{1} = \frac{\frac{dX}{dx} + i\,\frac{dY}{dy}}{i} = 1, \quad \text{de donde}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dx}; \qquad \frac{dY}{dx} = -\frac{dX}{dy}.$$

Estas son las ecuaciones de condición que deben realizarse para que la función admita una sola derivada expresada por $\frac{dX}{dx}\,i + \frac{dY}{dx}$, ó también por $\frac{dY}{dy} - i\,\frac{dX}{dy}$, cualquiera que sea el camino que siga la variable para alcanzar el punto supuesto. En este caso la función es monógena.

Las derivadas de las ecuaciones de condicion procuran además las igualdades siguientes:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2Y}{dx\,dy} = -\frac{d^2X}{dy^2}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dxdy}, \quad \frac{d^2Y}{dxdy} = -\frac{d^2X}{dy^2}, \quad \frac{d^2X}{dxdy} = \frac{d^2Y}{dy^2}, \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{d^2X}{dxdy},$$

de donde

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{d^2X}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{d^2Y}{dx^2} = 0.$$

Esto nos dice que solo deben admitirse para X é Y aquellos valores que se sujeten á las condiciones que anteceden.

En el concepto de referirse á coordenadas polares, se tendrá:

$$z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega);$$

$$dz = (\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)\, d\rho + \rho(-\operatorname{sen}\omega + i\cos\omega)\, d\omega;$$

de donde, si la función es $u + vi$, resulta:

$$\frac{d(u+vi)}{dz} = \frac{\left(\frac{du}{d\omega}d\omega + \frac{du}{d\rho}d\rho\right) + \left(\frac{dv}{d\omega}d\omega + \frac{dv}{d\rho}d\rho\right)i}{(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega)\,d\rho + \rho(-\operatorname{sen}\omega + i\cos\omega)\,d\omega} =$$

$$\frac{\frac{d\rho}{d\omega}\left(\frac{du}{d\rho} + \frac{dv}{d\rho}i\right) + \left(\frac{du}{d\omega} + i\frac{dv}{d\omega}\right)}{\frac{d\rho}{d\omega}(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega) + \rho(-\operatorname{sen}\omega + i\cos\omega)}$$

Este resultado será independiente de la relación $\frac{d\rho}{d\omega}$, si la sujetamos á las condiciones siguientes

$$\frac{\frac{du}{d\rho} + \frac{dv}{d\rho}i}{\cos\omega + \operatorname{sen}\omega} = \frac{\frac{du}{d\omega} + \frac{dv}{d\omega}i}{\rho(-\operatorname{sen}\omega\, i\cos\omega)},$$

igualdad que puede tomar la forma:

$$\frac{\rho i\frac{du}{dx} - \rho\frac{dv}{dx}}{\rho(-\operatorname{sen}\omega + i\cos\omega)} = \frac{\frac{du}{d\omega} + \frac{dv}{d\omega}}{\rho(-\operatorname{sen}\omega + i\cos\omega)}$$

de donde resultan las ecuaciones de condición.

$$\frac{dv}{d\omega} = \rho\,\frac{du}{d\rho}\,, \quad \frac{du}{d\omega} = -\rho\,\frac{dv}{d\rho}$$

4.—PROBAR QUE LAS FUNCIONES ORDINARIAS SON MONÓGENAS.

Las funciones ordinarias se hacen dependientes de la función exponencial, puesto que las expresiones

$$y = x^{m}, \quad y = l.x \;, \quad y = sen\ x. ....etc.$$

pueden adqnirir las formas siguientes:

$$y = e^{m\,l\,x}, \; y\,x = e^{x} \;, \; y = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \; ....etc.$$

Además, la exponencial es monógena; en efecto, sea

$$e^{x+yi} = e^{x}\,(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

al comparar este resultado con X + Y i, se obtiene;

$$X = e^{x} \cos y. \;, \quad I = e^{x} \operatorname{sen} y$$

ó sea

$$\frac{dX}{d\rho} = e^{x} \cos y. \,, \quad \frac{dI}{dy} = e^{x} \cos y.$$

$$\frac{dY}{dx} = e^{x} \operatorname{sen} y \,, \quad \frac{dX}{dy} = - e^{x} \operatorname{sen} y;$$

luego la función exponencial es monógona, puesto que se verifican las ecuaciones de condición

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} \;; \quad \frac{dY}{dx} = - \frac{dX}{dy}.$$

Ahora bien, como las otras funciones ordinarias dependen de ésta, de ahí resulta que las funciones ordinarias pueden considerarse todas monógenas.

(Se continuará.)

VARIEDADES

PROGRAMA DEL CURSO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE MOSKOW. Creemos de gran utilidad para los interesados en seguir los programas y planes de enseñanza adoptados en algunas Universidades ó Escuelas técnicas, el dar un resumen del programa publicado en la *Bibliotheca mathematica* que dirige en Stokolmo el Sr. Eneström, haciendo un estracto de algunas de las 59 lecciones que constituyen el curso de Historia de las matemáticas explicado en la Universidad de Moscow, é instituido desde el año 1882.

1. *Introducción.* (Objeto de la historia de las matemáticas y su fin; a) filosófico; b) científico; c) pedagógico; d) generalmente instructivo. Principio de las investigaciones sobre la historia de las matemáticas. Resumen del estado literario de la historia de las matemáticas en la antigüedad, en la edad media y en los tiempos modernos. Las lecciones 2.ª y 3.ª están dedicadas al origen y primeros desarrollos del cálculo verbal y al origen de los sistemas de numeración. La 4.ª trata del origen y desarrollo primitivo del cálculo gráfico. Cálculo del nudo entre los chinos y los peruanos. Tabla de Lochon; los quipos. Formas figurativas del cálculo, etc. La lección 5.ª continúa los desarrollos del cálculo gráfico. La 6.ª, 7.ª y 8.ª trata de las matemáticas entre los ejipcios. La escuela jónica y la pitagórica son objeto de las lecciones 9, 10 y 11; con la 12 comienza la historia de las matemáticas griegas, tratándose en la 13 de Platón y su escuela. En la lección 14 se trata de Euclides y sus trabajos, haciéndose una relación general de sus «Elementa» de las «Falsas conclusiones» los «Porismas» las «Dadas», el libro de la división de las figuras» las «secciones cónicas» etc.

Eratósthenes y Apolonio, los matemáticos italianos y la última época de los progresos de la geometría griega son el objeto respectivo de las lecciones 14, 16 y 17. De las investigaciones de Heron y Sixto Julio Africano en mecánica y geodesia y de las de trigonometría de Geminos, Theodosios, Menelao; Ptolomeo etc., tratan la 19 y la 20, dedicándose las 20 y 21 al análisis indeterminado y á la decadencia de las matemáticas en Grecia. De la 22 á la 25 sirven para hacer la exposición del desenvolvimiento matemático en la India, debiéndose citar entre los varios asuntos los trabajos de el Aryabatha Brahmagupta y Baskara Acayra, la Aritmética teórica, el Álgebra, las ecuaciones, el análisis indeterminado los rasgos característicos de la geometría india, la aproximación de π, la trigonometría, los senos y los senos versos y sus tablas. La lección 25 comienza con la literatura matemática de los árabes, hasta la 28. En esta se trata de las matemáticas en los pueblos que importaron las matemáticas griegas en la Europa Occidental. La 29 trata de los estudios en los conventos, Casiodoro, Boecio, Isidoro de España, Alcuino, y la obra civilizadora de Carlomagno. Gerbert y obras de los matemáticos árabes traducidas en latin son objeto de las lecciones 30 y 31. Sucesivamente las lecciones 32, 33, 34 y 35 tratan de Leonardo de Pisa, apropiación por la Europa Occidental de los conocimientos científicos transmitidos por los árabes, y del movimiento matemático realizado en Italia por Ferro Tartaglia, Cardan, Ferrari y Bombelli.

A Vieta cuya importante y decisiva influencia en el progreso de la matemática se da á conocer, con la exposición de sus trabajos, en las lecciones 36 y 37, siguen el examen del Álgebra en Alemania, Inglaterra y Holanda y el descubrimiento de los logaritmos. Las lecciones 40 y 41 tratan respectivamente de Descartes y de los progresos del análisis indeterminado y origen de la teoría de las probabilidades, Bachet de Meziriac, Pascal y Fermat.

En fin, el desarrollo del cálculo infinitesimal, cuyos primeros principios sentó Kepler, el método de los indivisibles de Cavalieri, otros métodos debidos á Fermat, Roberval, Wallis, Mercator Gregorio de St Vincent, el método de las fluxiones de Newton y el análisis infinitesimal de Leibnitz. El análisis infinitesimal entre los matemáticos ingleses Taylor y Maclaurin entre los matemáticos del continente los Bernoulli y por último el Marqués de l'Hôpital, Côtes y Moivre constituyen los asuntos correspondientes á las lecciones del programa hasta la 51, terminando el curso con Euler, Lagrange, los geómetras del siglo XVII y XVIII, y en fin, Monge con la importancia de sus trabajos en el desarrollo de la Geometría sintética y Carnot y Poncelet que influyen en la emancipación de la Geometría del Análisis para su futuro progreso.

Estas indicaciones del interesante curso de Historia de la matemática profesada en la Universidad de Moscow, así como las que hicimos en el núm. 7.º de este periódico al tratar de la enseñanza de esta asignatura en la Universidad de Texas ponen en evidencia la que van adquiriendo los estudios matemáticos desde el punto de vista crítico y filosófico y señalan la necesidad de completar los estudios del profesorado en ciencias con una síntesis general que reuna estos modos superiores de considerar la ciencia.

PROGRAMA PARA LA ASIGNATURA DE CÁLCULO INFINITESIMAL *destinado al curso de 1890 á 1891 en la Escuela preparatoria de Ingenieros y Arquitectos.*

El programa que acaba de publicar el profesor de la Escuela Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos Sr. Bentabol, conforme al curso explicado por el mismo en dicha Escuela, ofrece algunas particularidades que su autor consigna en un breve razonamiento preliminar.

Se fija ante todo en algunos puntos oscuros ó discutibles, que en ésta, como en las demás ciencias, aparecen al tratarse de sus conceptos primitivos, y que en algunos tratados se exponen demasiado someramente, por lo cual dicho señor reunió estas principales cuestiones en su folleto titulado *La introducción al estudio del cálculo infinitesimal,* de que ya se dió cuenta en la pág. 44 de este periódico. La explanación de estas cuestiones fundamentales constituyó la introducción al curso del Sr. Bentabol. Cierta involucración de teorías que se observan en algunos tratados en los cuales no se hallan separada la parte doctrinal del cálculo de sus explicaciones geométricas son muy tenidas en cuenta por el Sr. Bentabol, creyendo lógico el reunir éstas en cuerpo de doctrina en la última parte de su curso, que forma la *Geometría infinitesimal.* Además observa que la teoría de las series, verdaderos límites de sumas en número infinitamente creciente de sumandos, que constituyen una especie de cálculo integral más elemental que el así llamado, y al cual pueden servir de preparacion, no pueden estudiarse debidamente sin el conocimiento del cálculo diferencial, siendo expuestas á continuación de éste, evitando así el interrumpir este estudio, como se hace en algunos tratados, para reanudarlo, con pérdida de tiempo y unidad en el plan. También insiste el Sr. Bentabol en la inexactitud ó poca conveniencia de algunas denominaciones unánimemente empleadas como la palabra *diferencial,* que conceptúa como una imperfecta traducción de la palabra *diferentielle* y las denominaciones de *envolventes* y *envueltas*, que se presentan en muchos casos en contradicción con los hechos, por hallarse envuelta la envolvente, y á las cuales sustituye las de *curvas tangentes y tangenciales,* así como emplea además las denominaciones de *cantidades infinitamente crecientes,* etc. Y ciertamente que convendría algunas veces alterar denominaciones defectuosas comunmente empleadas; pero en nuestra humilde opinión, si esto pudiera convenir en un prudentísimo límite, la aspiración á reformar el lenguaje matemático, por más que tendiera á su perfeccionamiento, conduciría á la larga á discrepancias que es de todo punto preciso evitar, siendo preferible salvar este inconveniente en la definición más bien que en la palabra, signo de la noción ó concepto, pues sabido es que en las definiciones matemáticas el signo es lo accesorio, siendo lo esencial el significado que constituye el objeto definido.

Este es el resumen del Programa publicado en la *Crónica Científica,* donde con más detalles se expresó el concepto y extensión de la asignatura esplicada por el distinguido profesor de la Escuela preparatoria de ingenieros y arquitectos, que procura con éxito ajustar su plan de enseñanza á los últimos adelantos de la ciencia.

***

COMPLEMENTO ELEMENTAL Á LA ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA DE LA SEGUNDA ENSEÑANZA *por D. Manuel Salavera.*

Es un motivo de satisfacción para los que se interesan por los adelantos de las ciencias en España, el hecho de aparecer obras que se salen del molde permanente segun el cual por desgracia muchas se han ido sucediendo, sin ofrecer siquiera novedad en la *forma*, y la nueva obra del distinguido profesor del Instituto de Tarragona se encuentra entre las que pueden citarse como ejemplo de que vamos encaminándonos hácia un período de iniciativa individual, muy distinto del de la prolongada tutela en que vivimos sometidos á los restringidos límites de los programas oficiales, que no siempre pueden prever todas las contingencias ni eventualidades del progreso científico.

El Sr. Salavera ha creido necesario, sin salirse de los conceptos elementales, el presentar en su nueva obra otros que ya van incluyéndose en los libros destinados á los estudiantes (1), de manera que les sirvan de base para los estudios de Facultad y para el ingreso en carreras especiales, con señalada ventaja de su cultura científica, si bien es cierto que para esperar tales frutos en la segunda enseñanza se impone, como indica dicho señor profesor un examen de ingreso más riguroso y completo que el que por desgracia hoy se exige, y

(1) Desde hace años entran en plan de exposición de mis tratados elementales la teoría de las congruencias en Aritmética, como base de la teoría divisibilidad; en Álgebra no solo las teorías de determinantes, teoría general de las operaciones, etc., ya universalmente expuestas, sino la de las sustituciones, la teoría geométrica de las imaginarias, de las ecuaciones de congruencia, etc., en Geometría la de la homotecia, la de correlación, etc., muy útiles para que los alumnos se formen conceptos generales.—Z. G. de G.

reduce nuestros centros de segunda enseñanza á escuelas de instrucción primaria un poco ampliadas.

Las materias tratadas en la obra del Sr. Salavera son las siguientes:

Algoritmia y Algoritmos. Módulo, indicando algunas de las varias acepciones que tiene esta palabra. Congruencias, exponiendo los principios fundamentales de esta teoría, seguidos de algunas aplicaciones, principalmente á la determinación de los caracteres de divisibilidad y á la comprobación de algunas operaciones numéricas. Proporciones armónicas. En las progresiones, algunos problemas como, por ejemplo, la fórmula general de la suma de potencias de los términos de un mismo grado de una progresión por diferencia é indicaciones sobre las factoriales. Constantes, variables, función, series, finito, indefinido, límites, teoremas y aplicaciones. Magnitudes conmensurables é inconmensurables. Errores, fracciones continuas. Imaginarismo y su representación geométrica. Combinatoria, probabilidades, sucesión, inversión y sustitución. Matrices y determinantes, tratando hasta los de cuarto orden y de la aplicación á resolver sistemas de ecuaciones. Ecuaciones de segundo grado. Máximos y mínimos. Ecuaciones *trinomias y bicuadradas, transformación* de las expresiones de la forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. Ecuaciones recíprocas de cuarto grado. Ecuaciones binomias. Ecuaciones exponenciales. Anualidad, imposición y amortización. Rentas perpétuas, vitalicias y seguros. Involución.

⁂

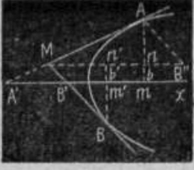
Arithmetica para uso dos Lyceus e escolas normales ***por B. V. Moreira de Sá professor da escola normal do Porto.*** La obra del señor Moreira de Sá contiene las teorías que se exigen en los cursos de los Liceos de Portugal, observándose en toda ella un rigor lógico que da cierta unidad en la forma de la exposición, nunca interrumpida; y á ello contribuyó ciertamente la forma esquemática empleada en las demostraciones, donde se nota un predominio de los conceptos combinatorios.

Antes de entrar en la exposición de la Aritmética, presenta unas nociones preliminares que le permiten elevarse gradualmente desde el número abstracto y entero hasta los números fraccionarios é irracionales, terminando con una indicación de los conceptos lógicos que deben conocerse para hacer el estudio de la Aritmética con rigor y aprovechamiento.

En la exposición del texto comienza al tratar cada materia por la definición, siguiendo sus consecuencias inmediatas, después los teoremas relativos á la cuestión considerada, y en fin, las reglas y principios prácticos; y la forma esquemática de las demostraciones permite el tratar sin confusión, y antes bien con gran sencillez la gran variedad de casos que en cada cuestión ocurren como consecuencias rigurosas de cada definición. Así, por ejemplo en la suma y resta, como en la multiplicación y división enuncia la totalidad de proposiciones concernientes á los resultados de combinaciones cualesquiera de la operación directa con su inversa, y para ultimar estos desarrollos termina con la exposición de las leyes de *asociación*, de *conmutación* y de *distribución*. Además trátase de las operaciones con polinomios, hallándose representado cada término de éstos por una sola letra.

El libro 1.º termina con las propiedades de los números enteros expuestas con el rigor en el orden y la brevedad en la forma que permite el predominio de la forma esquemática de las demostraciones. Esta facilita el demostrar en la teoría de las fracciones las propiedades que otros autores dan á conocer en la teoría de la proporcionalidad, y el plan general permite tratar siempre las potencias y raices inmediatamente después de las demás operaciones.

No dejarémos de citar, por último la manera notable de establecer en el libro 3.º que trata de los números irracionales, las nociones de número inconmensurable y de límite, presentadas con rigor y claridad.



(1)

En fin á la teoría de las progresiones sigue la de los logaritmos, ya derivados del concepto de función exponencial, ya de la simultánea consideración de dos progresiones.

Z. G. de Galdeano.

***

Enunciados de las cuestiones de la «Nueva Correspondencia Matemática»

7. Una elipse cuyos ejes se conocen, gira en su plano alrededor de su centro. En cada una de sus posiciones se le trazan tangentes en los puntos, en que se halla cortada por dos rectas rectangulares

(1) Esta figura corresponde á la solución del problema núm. 398 dada en el núm. 8.º, página 208.

fijas, trazadas por dicho centro. Hallar el lugar de los puntos de intersección de las tangentes. Se consideran además las cuerdas de contacto así determinadas, en la elipse, y se trata de hallar el lugar de sus intersecciones sucesivas.

(Lille. Concours académique. 1875).

8. Siendo A, B dos puntos de una elipse, P el punto de encuentro de las normales á la curva en estos dos puntos; C, D los pies de las otras dos normales que se pueden trazar por el punto P:

1.º Hallar el lugar que describe el centro de la hipérbola equilátera que pasa por los cuatro puntos A, B, C, D cuando la secante AB se mueve paralelamente á sí misma.

2.º Demostrar que el punto D′, diametralmente opuesto al punto D, se halla con A, B, C, en una misma circunferencia; y hallar el lugar de los centros de esta circunferencia, cuando la recta AB se mueve como en el primer caso.

(Lille. Concours académique. 1876).

9. Se dá una circunferencia, referida á dos ejes rectangulares OX, OY y un punto A sobre OX. Desde el punto A se trazan secantes ABC, después se construyen en los puntos de intersección B, C, y se proyecta sobre estas tangentes el punto de intersección D, de ABC con OY. Hallar el lugar de los puntos M así obtenidos.

Indicar todas las formas de la curva.

(H. Brocard).

10. Dado un producto de n factores lineales con dos variables de la forma

$$(x+y)\,(x+y-1)\,(x+y-2)\ldots(x+y-n+1),$$

se trata de descomponerlo en una suma de productos cuyas variables queden separadas.

(H. Brocard).

11. Integrar la ecuación

$$xy\,dy^2-2\,(ax^2+by^2)\,dx\,dy+xy\,dx^2=o$$

(E. Catalan).

12. Sean AB la tangente en A á una circunferencia O; DE la polar del punto A con relación á otra circunferencia O′. Hallar el lugar geométrico de la intersección M de las rectas AB, DE cuando el punto A describe la circunferencia O.

(Zahradnik).

Cuestiones propuestas por «M. Lemoine»

13. Bajo qué condición pueden las longitudes $2p$, R, r representan respectivamente el perímetro, el radio del círculo circunscrito y el radio del círculo inscrito de un triángulo.

14. En un triángulo rectángulo el semi-perímetro es igual á la suma del radio del círculo inscrito y del diámetro del círculo circunscrito (esto es evidente). Demostrar que recíprocamente: si en un triángulo el semi-perímetro es igual á la suma del radio del círculo inscrito y del diámetro del círculo circunscrito, el triángulo es rectángulo.

15. Sea un triángulo ABC del que se da la base BC. Hallar el lugar de A, sabiendo que los lados se hallan en progresión aritmética; caso en que la base no es ni el lado mayor ni el menor.

16. Hallar la condición para que el círculo conjugado sea tangente al círculo de Brocard, y demostrar que hay triángulos reales que la satisfacen.

17. Si se designan por δ, δ_a .. las cantidades $4R+r$, $4R-r_a$, ... siendo r_a el radio del círculo ex-inscrito tangente al lado BC, demostrar que si se tiene: $\delta^3=p^2(16R-r)$, el punto de Gergonne del círculo inscrito se halla en el círculo conjugado, y que si se tiene $\delta_a^3=(p-a)^2(16R-r_a)$, el punto de Gergonne del círculo ex-inscrito que tiene por radio r_a se halla en el círculo conjugado, hacer ver que existen triángulos reales que satisfacen estas condiciones.

El centro del círculo circunscrito no se halla nunca en el círculo conjugado.

18. El ortocentro, el baricentro, el centro del círculo inscrito no se hallan nunca en el círculo de Brocard (prescindiéndose del caso del triángulo equilátero). Los centros de los círculos ex-inscritos tampoco se hallan en él.

19. Si el círculo de Brocard toca á la biscetriz del ángulo A, se tiene: $2a=b=c$.

Si toca á la bisectriz exterior del ángulo A, se tiene

$$4a^4bc+8a^2b^2c^2=(b^3-c^3)^2.$$

20. Si se tiene

$$p^2(4R^2+20Rr-2r^2-p^2)=rd^3\,.$$

el triángulo es isósceles.

Zaragoza. -- Imprenta de C. Ariño, Coso. 100, bajos