Año I Zaragoza 20 de Octubre de 1891 Núm. 10

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

LAS GENERALIZACIONES DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

POR M. EMILE VIGARIÉ

Esta nota tiene por objeto dar á conocer á los lectores de EL PROGRESO MATEMÁTICO las notables generalizaciones de que ha sido objeto la Geometría del triángulo.

Para no dar á este trabajo una extensión demasiado considerable, indicaremos sencillamente, sin ninguna demostración, los resultados obtenidos.

Histórico.

Las propiedades del triángulo se han extendido sucesivamente al cuadrilátero, al exágono y además á los polígonos, y en el espacio, al tetraedro y á los poliedros.

En 1874, M. Picquet *(Sur le centre des médianes antiparallèles, Congrès de Lille)* había mostrado que, de una manera general, no existe punto que en el tetraedro posea propiedades análogas á las que posee el punto de Lemoine en el triángulo.

Diez años después, M. J. Neuberg, en una admirable *Mémoire sur le tétraèdre (Mémoires couronnés de l'Acad. royale de Belgique*, 1884), generalizó en el tetraedro la noción del punto de Lemoine y de los puntos de Brocard; sus estudios le condujeron á dar á conocer nuevas propiedades y á estudiar varios puntos notables. Esta primera tentativa no quedó aislada.

El año siguiente, M. Tucker *(some properties of a quadrilateral in a circle under rectangle, whose opposite sides are equal. Educat. Times*, 1885) hizo ver que, si se toma un cuadrilátero sujeto á ciertas condiciones (la de tener un punto de Lemoine), las propiedades conocidas del punto de Lemoine, de los puntos y del círculo de Brocard se encontraban inmediatamente. Este estudio fué tratado de

© Biblioteca Nacional de España

nuevo en *Mathesis*, y M. Neuberg *(Sur le quadrilatère harmonique,* 1885) dió á conocer que todas las propiedades demostradas para el triángulo se verificaban en este cuadrilátero particular, que llamó armónico. Las mismas generalizaciones se extendieron al exágono por M. Casey *(On the Harmonic Hexagon of a triangle, Royal Irish Academy,* 1886), y en fin, á los polígonos y á los poliedros por MM. Neuberg y Tarry *(Sur les polygones et les polyèdres harmoniques, Nancy,* 1886). Más recientemente M. T. C. Simmons *(Proceedings of the Lond. Math. Soc.* 1887) ha indicado un nuevo método para el estudio de los polígonos armónicos *(A new method for the investigation of Harmonics polygons).*

Desde hace algunos años, estas generalizaciones se han introducido en las obras clásicas inglesas (véase J. Casey: *A sequel to Euclid, a Treatise on Conics Sections).* Nosotros, no poseemos en francés, más que las traducciones en el periódico belga *Mathesis* (1889) del capítulo que, en la última edición de *A Sequel to Euclid* (1888) de M. Casey, se refiere al triángulo. Además de las memorias arriba citadas, indicarémos las siguientes:

1.° C. Thiry.—Note sur le quadrilatère harmonique *(Journ. de math. Elém* 1887 pp. 222—225).

2.° J. Casey.—A treatise on plane trigonometrie. (Dublin et Londres 1888. 1 vol.)

3.° S. Roberts.—On the analogous of the nine-points circle in space of three dimensions, and connected theorems *(Proceedings of the London math. Society.* 1888, pp. 152—161).

4.° J. Casey.—Complément à la théorie des polygones harmoniques (*Mathesis* 1890, pp. 96—104).

5.° G. de Longchamps.—Sur le tétraèdre orthocentrique *(Mathesis* 1890, pp. 49—53, 77—82).

6.° Sollertinsky.—Propriétés des coniques *(Mathesis* 1891, pp. 177—182).

Vamos á dar á conocer las generalizaciones de que acabamos de tratar, siguiendo el orden histórico de sus descubrimientos.

Cuadrilátero armónico.

1. Para hacer la analogía entre el triángulo y el cuadrilátero tan completa como sea posible, es necesario considerar un cuadrilátero inscriptible ABCD que posea un punto de Lemoine, es decir, un punto cuyas distancias á los lados sean proporcionales á estos lados. Es preciso para esto que se tenga entre los lados las relaciones

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \text{ ó } AB.CD = BC.AD.$$

© Biblioteca Nacional de España

Esta relación es necesaria y suficiente: Tal cuadrilátero se ha llamado por M. Neuberg *cuadrilátero armónico* (*).

El punto de Lemoine K se halla en las intersecciones de las diagonales AC, BD del cuadrilátero.

A un círculo dado se puede inscribir una infinidad de cuadriláteros armónicos que tengan por punto de Lemoine un punto interior dado K; se traza por K una cuerda cualquiera AC y se une el punto K al polo de AC.

En el cuadrilátero armónico, como en el triángulo, las *simedianas* son las rectas que unen el punto de Lemoine á los vértices A, B, C, D de la figura.

2. Las *simedianas* del triángulo ABC, ó las segundas diagonales del cuadrilátero armónico ABCD son las cuerdas comunes al círculo ABC y á uno de los círculos de Apolonio (**).

3. Hagamos en el cuadrilátero armónico

$$AB = a,\quad BC = b,\quad CD = c,\quad DA = d,\quad AC = f,\quad DB = g.$$

Si x, y, z, u son las longitudes de las perpendiculares bajadas desde K sobre los lados del cuadrilátero armónico, se tiene por hipótesis:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}$$

Si $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$ es el valor común de estas relaciones iguales, φ es un ángulo auxiliar, llamado *ángulo de Brocard* del cuadrilátero, y se tiene, designando por ω el ángulo de Brocard del triángulo ABC:

$$\cot\varphi = \frac{1}{2}(\cot B + \cot\omega)$$

$$\cot^2\varphi = 1 + \cot^2 B + \cot^2 A$$

$$\operatorname{cosec}^2\varphi = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B.$$

4. Hagamos $OK = \rho$, siendo O el centro del círculo ABCD y R el radio:

$$\rho^2 = R^2\cos^2 B + R^2\operatorname{sen}^2 B\left[1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right] = R^2(1 - \operatorname{tg}^2\omega)$$

Esta fórmula muestra que el ángulo de Brocard es constante en

(*) Esto que se refiere al cuadrilátero armónico, ha sido tomado de las dos memorias arriba citadas de M. Neuberg y de M. Tucker. La memoria de este último autor se halla seguida por proposiciones debidas á M. M' Cay.

(**) Se llaman *círculos* de Apolonio los círculos cuyo diámetro es el segmento de un lado que las bisectrices trazadas por el vértice opuesto determinan sobre este lado.

© Biblioteca Nacional de España

todos los cuadriláteros armónicos inscritos al mismo círculo O y que tienen el mismo punto de Lemoine.

El círculo que tiene OK por diámetro es el *círculo de Brocard* del cuadrilátero, y es la expresión de su diámetro. El *primer cuadrilátero de Brocard* es el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos M, N, P, Q en que el círculo de Brocard encuentra á las perpendiculares bajadas desde O sobre *a*, *b*, *c*, *d*.

5. Las rectas AM, BN, CP, DQ se encuentran en un mismo punto Ω del círculo de Brocard; igualmente, las rectas BM, CN, DP, DQ concurren en un mismo punto Ω′ de este círculo.

Los puntos Ω, Ω′ son los *puntos de Brocard* del cuadrilátero armónico, y se hallan caracterizados por las igualdades de ángulos:

$$\Omega AB = \Omega BC = \Omega CD = \Omega DA$$
$$\Omega' BA = \Omega' CB = \Omega' DC = \Omega' AD$$

Ω′ es el *punto directo de Brocard*, Ω es el *punto retrógrado de Brocard*. Se llama *segundo cuadrilátero de Brocard* el cuadrilátero que tiene por vértices los pies E, G, H, I de las perpendiculares bajadas desde O sobre las simedianas del cuadrilátero armónico. Este cuadrilátero, que es armónico, se halla inscrito al círculo de Brocard.

Se obtienen fácilmente las siguientes fórmulas:

$A\Omega = d \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} A$	$A\Omega' = a \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} A$
$B\Omega = a \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} B$	$B\Omega' = b \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} B$
$C\Omega = b \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} A$	$C\Omega' = c \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} A$
$D\Omega = c \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} B$	$D\Omega' = d \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} B$

y otras muchas que es fácil deducir de las precedentes.

La *potencia del vértice A con respecto al círculo de Brocard* es igual á:

$$\frac{1}{2} ad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} A.$$

6. Los puntos de Brocard son los focos de una elipse inscrita al cuadrilátero armónico, que es la *elipse de Brocard* del cuadrilátero. Las proyecciones de dichos puntos sobre los lados del cuadrilátero ABCD se hallan situadas en una misma circunferencia que tiene por diámetro el eje mayor de la elipse de Brocard del cuadrilátero.

7. Unamos los puntos de Brocard á los vértices del cuadrilátero ABCD. Si hacemos girar los haces (Ω, ABCD) en un ángulo cualquiera al rededor de Ω y el haz (Ω′, ABCD) en el mismo ángulo, pero en sentido contrario al rededor de Ω′, los rayos de estos haces encontrarán á los lados *a*, *b*, *c*, *d* en ocho puntos de una misma cir-

© Biblioteca Nacional de España

cunferencia. Todos los círculos que se obtienen así, haciendo variar el ángulo de las rotaciones forman un grupo.

Estos círculos se llaman *círculos de Tucker* del cuadrilátero ABCD. Sus centros están en la recta OK, y tienen por envolvente la elipse de Brocard.

8. Como para el caso del triángulo, existen en el cuadrilátero armónico casos particulares de los círculos de Tucker.

Si por el punto de Lemoine K de un cuadrilátero armónico ABCD se trazan paralelas á los lados, los ocho puntos en que estas paralelas encuentran á los lados adyacentes de ABCD se hallan en el mismo círculo *(primer círculo de Lemoine del cuadrilátero)* cuyo centro se halla en el punto medio de la recta que une K con el centro del círculo ABCD.

Si se trazan por el punto de Lemoine K paralelas á las tangentes trazadas por A, B, C, D al círculo circunscrito ABCD, y se limitan estas paralelas en los lados de los ángulos A, B, C, D, se obtienen ocho puntos de un mismo círculo *(segundo círculo de Lemoine del cuadrilátero)* cuyo centro se halla en K.

Se obtendría de una manera análoga el círculo de Taylor.

La analogía entre el triángulo y el cuadrilátero podría continuarse indefinidamente; pero nos detendremos aquí. Nos hemos contentado con dar definiciones; los lectores hallarán fácilmente la aplicación al cuadrilátero armónico de las propiedades enunciadas para el triángulo.

Exágono armónico.

9. Si ABC es un triángulo cualquiera, sus simedianas AK, BC, CK encuentran al círculo circunscrito en puntos A', B', C', y la figura ABCA'BC' es un exágono que M. Casey ha propuesto llamar *exágono armónico*. Las rectas AA', BB', CC' son las simedianas de este exágono. Dos triángulos como ABC, A'B'C' que admiten las mismas simedianas, se llamarán *triángulos cosimedianos*.

10. Estos triángulos poseen numerosas propiedades, de las que presentaremos las principales:

1. Si dos triángulos son cosimedianos, los lados del uno son proporcionales á las medianas del otro.

2. Dos triángulos cosimedianos tienen el mismo primer círculo de Lemoine y el mismo segundo círculo de Lemoine.

3. Los ángulos de Brocard de dos triángulos cosimedianos son iguales.

© Biblioteca Nacional de España

4. Los puntos de Brocard de un triángulo son también los puntos de Brocard de su triángulo cosimediano.

5. Si se toma la figura inversa del círculo circunscrito á dos triángulos cosimedianos, siendo el polo de inversión un punto cualquiera, los inversos de los seis vértices de los triángulos, son los vértices de dos nuevos triángulos cosimedianos.

6. La relación anarmónica de cuatro vértices consecutivos de un exágono armónico es constante.

7. Si los puntos de intersección de los lados de dos triángulos cosimedianos ABC, A'B'C' están designados por L, M, N, P, Q, R, los puntos de Brocard de los triángulos son puntos inversos (conjugados isogonales) con relación á los ángulos cuyas intersecciones son L, M, N, P, Q, R.

8. Si en un triángulo cualquiera se inscribe un triángulo semejante y cosimediano con él, el centro de semejanza de los triángulos inscritos es el punto de Lemoine del triángulo primitivo.

9. Si K es el centro de semejanza de un triángulo ABC de un triángulo homotético $\alpha\beta\gamma$, el círculo circunscrito al triángulo $\alpha\beta\gamma$ corta á las simedianas AA', BB', CC' en tres nuevos puntos α', β', γ' que son los vértices de un triángulo homotético con el triángulo simediano de ABC.

Los triángulos $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ son cosimedianos.

11. Si los lados del triángulo $\alpha\beta\gamma$ cortan á los lados de ABC en D, D'; E, E'; F, F'; los tres triángulos AFE', DF'B, D'CE son directamente semejantes. Sus puntos invariables son los centros de gravedad de estos triángulos, y sus puntos dobles son los otros puntos de intersección del círculo que pasa por los puntos invariables con las simedianas del triángulo ABC.

12. Si por el punto de Lemoine de un exágono armónico se trazan por sus vértices paralelas á las tangentes al círculo circunscrito, y se consideran las intersecciones de estas rectas con los lados del exágono que pasan por el vértice correspondiente, los doce puntos así obtenidos se hallan en un mismo círculo.

Este círculo, por analogía con lo que se verifica en el caso del triángulo y del cuadrilátero armónico, se ha llamado el *segundo círculo de Lemoine* del exágono armónico.

13. Las perpendiculares bajadas desde el punto de Lemoine de un exágono armónico sobre los lados de este exágono, son proporcionales á estos lados.

Si K es el punto de Lemoine y O el centro del círculo circunscrito

© Biblioteca Nacional de España

del exágono, el círculo que tiene KO por diámetro se llama el *círculo de Brocard* del exágono armónico.

Si se designan por x, y, z, u, v, w las perpendiculares bajadas desde K sobre los lados a, b, c, d, e, f, del exágono armónico, el ángulo auxiliar ω determinado por las igualdades

$$x = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \omega , \quad y = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \omega$$

se llama *ángulo de Brocard* del exágono armónico.

Designémos por L, M, N, P, Q, R los puntos de intersección del círculo de Brocard con las perpendiculares bajadas desde el centro del círculo circunscrito á los lados del exágono. El exágono LMNPQR se llama el *primer exágono de Brocard.*

Las rectas A'L, CM, B'N, AP, C'Q, BR concurren en un mismo punto Ω'; igualmente las rectas A'M, BL, C'R, AQ, B'P, CN concurren en un segundo punto Ω. Los dos puntos Ω, Ω', que se hallan en el círculo de Brocard, son los *puntos de Brocard* del exágono armónico.

Los puntos Ω, Ω' son los puntos inversos con relación á cada ángulo del exágono A B' C A'B C'.

Las perpendiculares bajadas desde los puntos de Brocard Ω, Ω', sobre los lados del exágono armónico son doce puntos de una misma circunferencia.

Se ha visto hasta ahora que todas las propiedades y todas las definiciones dadas para el triángulo se vuelven á encontrar en los casos del cuadrilátero y del exágono armónicos; nos parece inútil llevar más adelante la analogía, dejando esta tarea á nuestros lectores, y vamos á ocuparnos de una generalización más extensa: la de los *polígonos armónicos.*

(Se concluirá.)

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS INTEGRALES EULERIANAS

POR

D. Lauro Clariana y Ricart

Catedrático de la Universidad de Barcelona

(CONTINUACION)

5.—Funciones monotropas y polítropas.

Se denomina función *monodroma* ó *monotropa* en una porción de

© Biblioteca Nacional de España

plano, aquella en que la variable, después de recorrer cierta parte del mismo, al llegar al punto de partida, reproduce para la función el mismo valor.

Las funciones bien definidas, tales como, las racionales, exponenciales y circulares, son monodromas en toda la extensión del plano. No sucede lo propio con las funciones irracionales.

Sea $$\sqrt{z-a}$$

Esta función deja de ser monodrona en toda porción de plano que contenga el punto a. En efecto, si z describe una circunferencia de radio r cuyo centro sea a, el valor de la circunferencia re^{0i}, representa $z-a$, siendo r la recta que une los dos puntos a y z; luego

$$\sqrt{z-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{0}{2}i}.$$

Al describir la variable la circunferencia en sentido de los arcos positivos, resulta después de una vuelta

$$r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{0+2\pi}{2}i} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{0}{2}i} (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{0}{2}i}$$

la función, pues, cambia cuando la variable independiente llega á la posición primera.

La función que adquiere diferentes valores, cuando la variable pasa por ciertos puntos, se llama polítropa en la porción de plano que comprende dichos puntos. En este caso la función presenta diferentes ramas.

6.—Función logarítmica.

El conocimiento de la función logarítmica, tomada en su mayor grado de generalidad, es de importancia para esta clase de estudios.

Sea; $e^{\log z} = z$; $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$; $\log z = x + y\,i$;

luego: $$\log z = x + y\,i = \log[\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]$$

ó sea, $$\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = e^{x+y\,i} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Al separar los respectivos términos reales é imaginarios, resulta:

$$\rho\cos\varphi = e^{x}\cos y\,, \quad \rho \operatorname{sen}\varphi = e^{x}\operatorname{sen}\varphi$$

de cuyas igualdades se deduce fácilmente

$$\rho = e^{x}\,, \quad \cos\varphi = \cos y\,, \quad \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen} y,$$

© Biblioteca Nacional de España

de donde $x = \log \rho$, $y = \varphi + 2k\pi$, siendo K un número entero.

Así tendrémos en definitiva

$$\log z = \log \rho + i(\varphi + 2k\pi)$$

Si se toman los diferentes valores que van sucediéndose para la función, segun valores próximos de z y en el concepto de que exista la ley de continuidad, se alcanza, por ejemplo, el valor inicial u_0 que debe corresponder á $z = z_0$.

La función logarítmica ofrece, pués, una infinidad de ramas que se distinguen unas de otras por los diferentes valores que se atribuyen á k, siendo notable que las condiciones de continuidad desaparecen, si z pasa por cero, razón por la cual conviene que la variable no pase por el origen de coordenadas.

7.—Puntos singulares en funciones explícitas de una variable.

Consideremos una función racional, siendo la variable compleja y bajo la forma: $u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$, y en el concepto de que $f(z)$ y $\varphi(z)$ sean funciones racionales y enteras. A la vista de dicha fórmula, se deduce que todos los valores de u son finitos, excepto aquéllos que correspondan á las raices de $\varphi(z) = o$, en cuyo caso resultan los polos de la función u.

Los valores de los puntos respectivos á dichas raices suelen llamarse los infinitos de la función, así como los que corresponden á las raices de $f(z) = o$, constituyen los ceros de la misma. Todos estos puntos suelen llamarse singulares y son los más sencillos.

8.—Puntos críticos y singulares en general.

Sea una función algebráica u definida por la ecuación:

$$o = A u^m + B u^{m-1} + C u^{m-2} + \ldots\ldots = F(z, u)$$

siendo A, B, C, ... funciones de z.

Esta función produce diferentes ramas representantes de los diferentes valores de u, correspondientes á cada uno de los de z; puede seguirse el movimiento de cada rama, según el valor de partida de la variable z y en el concepto de sujetarse á la ley de continuidad. Sin embargo, este procedimiento caerá en defecto cuando la variable pase por puntos en número finito que reduzcan el coeficiente del primer término á cero; ó tambien en el caso de que los valores de z, satisfagan á las dos ecuaciones $F(z, u) = o$, $\frac{dF}{du} = o$, correspondientes á las raices iguales.

Toda esta clase de puntos forman los llamados puntos singulares

© Biblioteca Nacional de España

algebráicos de la función u, designándose en particular á los que satisfacen á la segunda condición, puntos críticos algebráicos.

Se conocen aún otra clase de puntos singulares correspondientes á las funciones trascendentes, tales como, por ejemplo, los pertenecientes á las funciones logarítmicas; más esta clase de puntos singulares se distinguen de los primeros, por llevar el sello de la indeterminación, ó sea por salirse de la finitud. Hay autores que llaman indistintamente puntos críticos á todos cuantos acabamos de indicar; de todos modos interesa que la variable independiente no pase jamás por dichos puntos críticos.

(Se continuará)

DÉVELOPPEMENTS SUR LES PARABOLES DE M. ARTZT

PAR M. G. DE LONGCHAMPS

Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

6.—*Equation de l'axe de* P_a. L'axe de P_a passe par le foyer, parallèlement à la médiane AM.

L'équation de AM est

$$\beta - \gamma = o;$$

Une parallèle sera donc représentée par

$$\beta - \gamma + \lambda(\alpha + \beta - \gamma) = o.$$

Disposons du paramètre λ de façon à la faire passer par le foyer de P_a et nous avons

$$b^2 - c^2 + \lambda(2b^2 + 2c^2 - a^2) = o.$$

Finalement,

$$\text{(B)} \qquad \alpha(c^2 - b^2) + \beta(3c^2 + b^2 - a^2) - \gamma(3b^2 + c^2 - a^2) = o.$$

représente l'AXE *de la parabole* P_a.

En posant

$$(b) \qquad 3b^2 + c^2 - a^2 = u, \qquad 3c^2 + b^2 - a^2 = u',$$

on peut observer que l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$\text{(B')} \qquad \alpha\frac{u' - u}{2} + \beta u' - \gamma u = o.$$

© Biblioteca Nacional de España

7.—*Equation de la tangente au sommet de* P_a.

Abaissons de F les perpendiculaires FH, FH′ sur les côtés AB, AC; HH′ sera la tangente au sommet de P_a. Proposons-nous de déterminer AH et BH.

A cet effet, abaissons MR perpendiculaire à AC; les triangles semblables AFH, AMR donnent

$$\frac{AH}{AF} = \frac{AR}{AM}. \qquad (1)$$

Calculons d'abord AF. Si, par B, on mène BD parallèle à l'axe FZ, le théorème de Ptolémée montre que les droites BF, BD sont isogonales sur AB; par suite l'angle FBA est égal à l'angle DB^x, c'est à dire MAB. D'après cette remarque, si l'on prolonge AM, jusqu'en A′, d'une longeur égale à elle même, les triangles AFB, ACA′ sont semblables et donnent: (1)

$$\frac{AF}{b} = \frac{FB}{c} = \frac{c}{2m}, \qquad (2)$$

où l'on a posé $AM = m$.

Calculons AR; le triangle CAM, donne

$$\overline{CM}^2 = \frac{a^2}{4} = b^2 + m^2 - 2b.AR;$$

et comme

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2},$$

nous avons, finalement,

$$4b\,AR = 3b^2 + c^2 - a^2 = K. \qquad (3)$$

Des égalités (1), (2), (3) on tire alors.

(1) On observera que ces égalités donnent les *coordonnées tripolaires* ABSOLUES du point F. On a, d'après elles,

$$AE = \frac{bc}{2m}.\ BF = \frac{c^2}{2m}.$$

On a, de même,

$$CF = \frac{b^2}{2m}.$$

La relation $\overline{AF}^2 = BF.CF$, que l'on peut déduire de ces formules, donne la démonstration d'un théorème connu: *la distance du foyer d'une parabole au pôle A d'une corde BC est moyenne géométrique entre les distances de ce foyer aux extrémités B, C de cette corde.*

© Biblioteca Nacional de España

$$AH = K.\frac{c}{8m^2}. \qquad (4)$$

Il est facile d'avoir BH puisque

$$BH = c - K.\frac{c}{8m^2} = \frac{c}{8m^2}\left[8m^2 - K\right].$$

ou

$$BH = K'.\frac{c}{8m^2}. \qquad (5)$$

Les égalités (4), (5) donnent enfin

$$\frac{AH}{BH} = \frac{u}{u'} \qquad (6)$$

Un Calcul analogue prouve que

$$\frac{AH'}{CH'} = \frac{u'}{u}. \qquad (7)$$

égalité qui résulte d'ailleurs de la précédente, par application d'une propriété connue (1).

Cela posé ; l'équation de HH' en coordonnés barycentriques étant

$$\alpha = m\beta + n\gamma$$

on a, pour $\beta = o$, $\alpha = n\gamma$; d'où

$$n = \frac{CH'}{AH'} = \frac{u}{u'}.$$

De même, pour $\gamma = o$, $\alpha = m\beta$; d'où

$$m = \frac{BH}{AH} = \frac{u'}{u}$$

L'équation de la tangente au sommet de la parabole P_a est donc

$$\alpha = \frac{u'}{u}\beta + \frac{u}{u'}\gamma, \quad (\text{TANGENTE AU SOMMET de } P_a)$$

dans laquelle u, u' sont données par les formules *(b)*, posées plus haut.

8.—*Coordonnées du sommet de* P_a. Le point *S* sommet de P_a peut être obtenu soit en cherchant le point de contact de HH' avec P_a, soit

(1) *Une tangente* HH' *à une parabole rencontre les tangentes* AB, AC *en deux points* H, H' *tels que* AH. AH' = BH. CH'.

© Biblioteca Nacional de España

en calculant les coordonnées du point commun à HH' et à l'axe de P_a. Ces deux voies conduisent très simplement, l'une et l'autre, au résultat cherché et l'on trouve

$$\frac{\alpha}{2uu'} = \frac{\beta}{u^2} = \frac{\gamma}{u'^2} \qquad (\text{SOMMET } de\ P_a)$$

9.—*Directrice de* P_a. On peut l'obtenir en déterminant la droite symétrique de la corde focale principale, par rapport au sommet. *Mais il est plus simple de la considérer comme la polaire du foyer.*

On sait que la polaire d'un point x_0, β_0, γ_0 relativement à la conique qui correspond à l'équation

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

est

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial f}{\partial \beta_0} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma_0} = 0.$$

En appliquant cette relation à la parabole $P_a\ (\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0)$

et au foyer

$$\frac{\alpha_0}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{\beta_0}{b^2} = \frac{\gamma_0}{c^2},$$

on a

$$\frac{1}{2}\alpha\,(b^2 + c^2 - a^2) = b^2\gamma + 6c^2. \quad (\text{DIRECTRICE de } P_a)$$

10.—Les formules diverses que nous avons établies plus haut trouveront de nombreuses applications que le lecteur imaginera facilement.

Nous voulons seulement, en terminant, signaler l'une des plus intéressantes.

Prenons deux droites *ox*, *oy* faisant un angle quelconque et considérons une parabole Σ touchant ces axes aux points P, Q.

En posant OP = *c*, OQ = *b*, PQ = *a* on obtiendra les éléments de Σ en appliquant les formules données plus haut; il ne restera plus qu'à effectuer dans ces résultats un changement de coordonnées, ce qui est la chose la plus simple (*Supplément* p. 164), et l'on obtiendra les éléments en question dans le système considéré *yox*.

© Biblioteca Nacional de España

UN TEOREMA GEOMÉTRICO

POR D. ATANASIO LASALA

Catedrático del Instituto de Bilbao.

Consideramos un deber el difundir y hasta vulgarizar entre los hombres de ciencia el conocimiento de la proposición que va á ser objeto del presente artículo, porque merece, á nuestro juicio, ocupar lugar preeminente entre los fundamentos de la Geometría superior, toda vez que en ella se encuentran refundidos, además de los teoremás sobre lás líneas proporcionales que contiene la Geometría elemental, los fecundos principios de la relación anarmónica y de la división homográfica y el teorema de Menelao, que han servido de base á los notabilísimos trabajos de Carnot, Chasles y otros célebres geómetras.

Como los ilustrados lectores de EL PROGRESO MATEMÁTICO han de juzgar por sí mismos, pasamos sin más preámbulo á exponer y demostrar el siguiente

TEOREMA FUNDAMENTAL. *(Fig. 1.ª)*

1. *Si tres rectas* PA, PB, PC *concurrentes en un punto* P *cortan á dos transversales* abc, a'b'c', *se verifica la relación* (1)

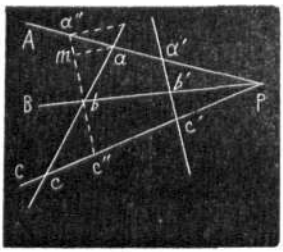

Fig. 1.ª

$$\frac{ba}{bc} : \frac{Pa}{Pc} = \frac{b'a'}{b'c'} : \frac{Pa'}{Pc'} \qquad [a]$$

ó bien $(\underline{a\,c\,b\,P}) = (\underline{a'\,c'\,b'\,P})$

Por el orígen b común á los segmentos ba y bc tracemos una paralela $a''\,c''$ á la transversal $a'\,b'\,c'$, y por a y a'' otras dos paralelas á la concurrente P C.

(1) Este teorema, cuyas importantes consecuencias desenvuelve el Sr. Lasala en el presente artículo, se halla enunciado en la obra de M. Catalan *Théorèmes et problèmes de Geométrie élémentaire (livr III theor XII)*, bajo la forma siguiente: *Si trois droites, issues d'un même point* O *rencontrent, en* A. B, C, *et* A', B', C', *deux transversales, on a*

$$\frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AO}{A'O} = \frac{CA}{C'A'} \cdot \frac{BO}{B'O} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CO}{C'O}.$$

© Biblioteca Nacional de España

Los triángulos semejantes bam, bcc'' y los $b\,n\,a''$, $b\,c\,c''$ nos dan

$$\frac{b\,a}{b\,c} = \frac{a\,m}{c\,c''} \qquad [1] \qquad \frac{b\,a''}{b\,c''} = \frac{a''\,n}{c''\,c} \qquad [2]$$

Los triángulos semejantes P $a\,c$, $a''a\,n$ y los P $a''c''$, $a\,a''m$ dan

$$\frac{\mathrm{P}\,a}{\mathrm{P}\,c} = \frac{a''a}{a''n} \qquad [3] \qquad \frac{\mathrm{P}\,a''}{\mathrm{P}\,c''} = \frac{a\,a''}{a\,m} \qquad [4]$$

Dividiendo la igualdad [1] por la [3] y la [2] por la [4] será

$$\frac{b\,a}{b\,c} : \frac{\mathrm{P}\,a}{\mathrm{P}\,c} = \frac{am.\,a''n}{c\,c''.\,a''a}, \qquad \frac{b\,a''}{b\,c''} : \frac{\mathrm{P}\,a''}{\mathrm{P}\,c''} = \frac{a''n.\,am}{c''c.\,a\,a''}$$

de donde $$\frac{b\,a}{b\,c} : \frac{\mathrm{P}\,a}{\mathrm{P}\,c} = \frac{b\,a''}{b\,c''} : \frac{\mathrm{P}\,a''}{\mathrm{P}\,c''}.$$

Sustituyendo $\frac{b\,a''}{b\,c''}$ por su igual $\frac{b'\,a'}{b'\,c'}$, y $\frac{\mathrm{P}\,a''}{\mathrm{P}\,c''}$ por $\frac{\mathrm{P}\,a'}{\mathrm{P}\,c'}$

será finalmente $$\frac{b\,a}{b\,c} : \frac{\mathrm{P}\,a}{\mathrm{P}\,c} = \frac{b'\,a'}{b'\,c'} : \frac{\mathrm{P}\,a'}{\mathrm{P}\,c'}.$$

De igual manera se demostrarían las relaciones

$$\frac{c\,a}{c\,b} : \frac{\mathrm{P}\,a}{\mathrm{P}\,b} = \frac{c'\,a'}{c'\,b'} : \frac{\mathrm{P}\,a'}{\mathrm{P}\,b'} \qquad \text{ó} \qquad (a\,b\,c\mathrm{P}) = (a'\,b'\,c'\,\mathrm{P})$$

$$\frac{a\,b}{a\,c} : \frac{\mathrm{P}\,b}{\mathrm{P}\,c} = \frac{a'\,b'}{a'\,c'} : \frac{\mathrm{P}\,b'}{\mathrm{P}\,c'} \qquad \text{ó} \qquad (b\,c\,a\mathrm{P}) = (b'\,c'\,a'\,\mathrm{P}).$$

Este teorema se verifica en todos los casos particulares que pueden ocurrir, ya se supongan una ó las dos transversales paralelas á alguna de las concurrentes en P, ó bien las transversales sean paralelas entre sí, ó bien el punto de concurso P se aleje al infinito.

Dejamos al cuidado del lector la comprobación de este aserto.

2. Están comprendidas en el teorema fundamental, como casos particulares del mismo, las siguientes proposiciones de la Geometría ordinaria:

PRIMERA. *Tres rectas paralelas dividen á dos transversales en partes proporcionales.*

En efecto: la relación [a] puede escribirse así:

$$\frac{b\,a}{b\,c} : \frac{\mathrm{P}\,a}{\mathrm{P}\,a'} = \frac{b'\,a'}{b'\,c'} : \frac{\mathrm{P}\,c}{\mathrm{P}\,c'};$$

© Biblioteca Nacional de España

si P se aleja al infinito, las razones $\frac{P\,a}{P\,a'}$ y $\frac{P\,c}{P\,c'}$ entre cantidades infinitamente grandes, cuyas diferencias $a\,a'$ y $c\,c'$ son finitas, son iguales á la unidad; luego

$$\frac{b\,a}{b\,c} = \frac{b'\,a'}{b'\,c'}$$

(Se continuará).

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

Observa Poncelet que la proyección *central* ó *cónica* no altera ni la correlación ni el grado ú orden de la figura primitiva ni, en general, toda especie de dependencia gráfica entre las partes de esta figura que sólo se refiere á la dirección indefinida de las líneas, su intersección mútua, su contacto, etc.; pero podrá hacer variar solamente la forma, la especie particular de estas líneas, y, en general, todas las propiedades concernientes á propiedades absolutas y determinadas, tales como las aberturas de ángulos, los parámetros constantes, etcétera. Así por ejemplo, de que una recta es perpendicular á otra en la figura primitiva, no se puede inferir que lo sea en la proyección de esta figura sobre un nuevo plano.

Esto sentado, define Poncelet las *figuras proyectivas* como aquéllas cuyas dependencias son indestructibles por el efecto de la proyección, llamando *relaciones ó propiedades proyectivas*, todas aquéllas que subsisten á la vez en las figuras dadas y en sus proyecciones.

Distingue entre las propiedades las *gráficas*, que son independientes de toda magnitud ó medida determinada, como por ejemplo, una propiedad relativa á puntos de intersección de ciertas líneas rectas que pasan por puntos de posición asignada ó que tocan líneas dadas de segundo grado, y las propiedades *métricas* que conciernen á relaciones de magnitudes en las que nada indica *á priori* si subsisten en las proyecciones. En cuanto á las primeras, de las cuales se ocupa exclusivamente, ó *propiedades de posición*, bastará establecerlas y demostrarlas en una posición cualquiera de la figura, para que sean aplicables, en general, á esta figura y á todas sus proyecciones posibles. En cuanto á las segundas, no se podrá afirmar *á priori* sin un exámen prévio, ni que estas propiedades subsisten ni que dejan de subsistir en la figura primitiva.

© Biblioteca Nacional de España

Para establecer el criterio que deba seguirse al examinar si una ralación subsiste ó no en las figuras que son proyecciones de otra dada, observa que al proyectarse desde un punto S los diferentes puntos A, B, C, ... de una figura, cuyas proyecciones son los nuevos puntos A', B', C' ..., como las áreas de los triángulos SAB, SA'B' que tienen un ángulo común se hallan entre sí en la razón de los productos SA. SB, SA'. SB' de los lados que los comprenden, llamando $\frac{1}{2}m$ esta razón, tan sólo dependerán de la mayor ó menor abertura de dicho ángulo, se tendrá, representado por a, b las longitudes de las proyectantes SA, SB, y p la de la perpendicular bajada desde S al lado AB: Área $SAB = \frac{1}{2} p.\ AB = \frac{1}{2} m.\ a.\ b$, de donde resulta $AB = m\frac{ab}{p}$, y para otra recta CD se tendrá $CD, = m'\frac{cd}{p'}$, etc., etc. Ahora bien, para que esta relación subsista, cualquiera que sea la posición particular de los puntos A, B, C... ó A', B', C' .... sobre las proyectantes SA, SB, ..., al sustituir en lugar de las cantidades que entran en la relación de que se trata sus valores obtenidos, deberá quedar satisfecha, independientemente de toda magnitud particular atribuída á las rectas SA, SB, ... ó a, b, p..... que fijan la posición de los puntos correspondientes A, B, C....; luego *estas rectas ó distancias deben desaparecer por sí en el resultado de la sustitución, como factores de todos sus términos; de modo que sólo quedará una relación entre las cantidades* m, m', m" ..... *si se reemplazan al mismo tiempo las perpendiculares* p, p', p" .... *por los valores que representan en cada triángulo parcial* SAD, SA'D' .... y recíprocamente, si esto se verifica, la relación mencionada será necesariamente proyectiva. Además, existe una clase de relaciones, muy extensa, para las que las perpendiculares p, p', $p"$.... desaparecen á la vez con a, b, c, ... del resultado de la sustitución, sin que sea preciso reemplazarlas, cómo en la hipótesis anterior, por los valores que representan en los triángulos correspondientes; y como no se ha hecho ninguna hipótesis particular sobre la situación de los puntos A', B', C' ... en el espacio, lo mismo que respecto á los puntos A, B, C... de que son las proyecciones, resulta que toda relación que satisfaga á las condiciones precedentes, *tendrá lugar, no sólo para las proyecciones ordinarias de esta figura sobre un plano, sino para todas las figuras rectilíneas y alabeadas que podrían concebirse como resultantes de la primera por la especie de proyecciones consideradas.* Además, para cualquiera especie de proyección, ya sea la perspectiva ó proyección sobre un plano, ó sobre

© Biblioteca Nacional de España

un plano, ó sobre una recta, dichas condiciones deben subsistir también entre las constantes m, m', m''... solo dependientes de la abertura de los ángulos ASB, CSD, ... ó *ángulos proyectantes de las rectas AB, CD, ..., y, como son las cantidades* m, m', *los senos de los ángulos proyectantes resulta que: si á partir de un punto cualquiera tomado como centro de proyección un haz de rectas proyectantes hácia los diferentes puntos de una figura dada arbitrariamente en el espacio ó en un plano, y las partes de una figura tienen una ó varias relaciones métricas proyectivas que satisfacen á las condiciones precitadas, las mismas relaciones tendrán lugar entre los senos de los ángulos proyectantes que les corresponden respectivamente.* Además, un teorema análogo resulta para el caso de coincidir el centro de proyección con el de una superficie esférica y al efectuarse la proyección sobre ésta.

(Se continuará)

Z. G. G.

INVESTIGACIONES FILOSÓFICO-MATEMÁTICAS

SOBRE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS

por D. Apolinar Fola, *Oficial del cuerpo de Carabineros.*

Antes de exponer el objeto principal de este artículo, que es dar noticia á nuestros lectores de la «segunda seccion de la obra» *Investigaciones filosófico-matemáticas sobre las cantidades imaginarias*, que acaba de publicar el ilustrado oficial del Cuerpo de Carabineros don Apolinar Fola, nos es indispensable, para tomar la cuestión desde su origen en nuestra pátria, por desgracia tan poco pródiga actualmente en lucubraciones de esta índole, remontarnos hácia los años de 1850 hasta 1861 en que era profesor del Instituto del Noviciado (hoy del Cardenal Cisneros) el ilustre pensador y filósofo profundo D. José M. Rey y Heredia.

Lamentábase este exímio catedrático de Lógica entre sus compañeros y amigos íntimos de que, la Matemática con ser ciencia de tan frecuentes y portentosas aplicaciones, rara vez sea considerada bajo su aspecto metafísico y trascendental, doliéndose, como de una profanación, al ver que son tantos los que operan sobre la *cantidad*, el *número*, el *espacio*, etc., y tan pocos los que comprenden estas nociones fundamentales, ó saben darse razon adecuada de las mismas teorías que rutinariamente han aprendido y por rutina aplican».

© Biblioteca Nacional de España

Una parte muy importante de la gloria que alcanzó Rey y Heredia al escribir su notabilísima obra *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias*, cuando ya por desgracia estaba próxima á estinguirse en la edad que constituye el apogeo de la vida, aquella luz tan espléndida que brotaba de su poderosa inteligencia, corresponde sin género de duda, al benemérito y respetable profesor del mismo Instituto D. Acisclo F. Vallín y Bustillo, que adivinando las dotes escepcionales de aquel peregrido ingenio, algo del espíritu matemático que bullía en tan privilegiado cerebro, le impulsó, asediándole continuamente para que hiciera brotar la claridad desde las tenebrosas regiones del imaginarismo matemático, y así en efecto se hizo.

Poco diremos actualmente acerca de la *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* que se publicó en 1865 bajo los auspicios del Gobierno, porque es obra muy conocida entre los aficionados á la matemática.

Nos limitaremos á manifestar que, esta obra, bajo su aspecto matemático se funda en los escritos de Argand, Buée, François, Warren, Peacock, Vallés, Mourey, Faure, Renouvier, Cournot, etc. Bajo su aspecto filosófico, evoca las doctrinas de la filosofía kantiana, en cuyo cuadro de las categorías halla Rey y Heredia el punto de partida en que ha de afianzar su doctrina filosófica del imaginarismo.

«Las categorías de la *cantidad* intervienen en la formación de todas las nociones del número, de la unidad, de la pluralidad, de la medida, del múltiplo, de la totalidad, de la fracción ó parcialidad.»

«Las de la *cualidad* dan un sentido y una afección, á las cantidades, y juegan en todas las teorías acerca de números positivos, negativos é imaginarios.»

Esta última categoría de la cualidad en la que los juicios existen en sus tres estados de *positivos, negativos y limitativos*, en los que, respectivamente, un concepto se halla incluído en la esfera de otro concepto (predicado), fuera de ella, ó en una esfera que se halla fuera del predicado, forman la base de la doctrina de Rey y Heredia, estableciéndose en ella que el concepto matemático de las cantidades *positivas, negativas* é *imaginarias* deriva naturalmente de las funciones que ejerce el entendimiento en dichos tres estados del juicio, y representa el esquema que contiene todo el cuadro de las oposiciones lógicas de la cualidad matemática, por dos rectas perpendiculares correspondientes á los juicios: A *es* B, A *no es* B, A *es no* B, A *no es no* B, respectivamente, observando que, no es precisamente la posición perpendicular de las cantidades indirectas la que se infiere de la teoría lógica, sino la exterioridad de su cualidad, con cuya condi-

© Biblioteca Nacional de España

ción cumplen también las infinitas oblícuas que pueden referirse al eje fijo de las positivas y negativas, expresando la perpendicularidad un grado máximo de *indirección* muy propio para realizar el esquema geométrico en toda su perfección ideal.

En el dominio puramente matemático Rey y Heredia no ha creado, ni ha sido su propósito el de acumular nuevos hechos á los ya presentados en las obras de los matemáticos que contribuyeron á aumentar las proporciones de su admirable edificación; pero ha dado solidez al conjunto, ha eslabonado los detalles entre sí, realizando una grandiosa síntesis, ha unido sólidamente por el razonamiento lógico las dades acá y allá esparcidas y no asentadas sobre una base común, de verlos descubrimientos matemáticos.

En su sistema desarrollado con rigurosa unidad de plan y de concepto se hallan: el importante concepto de la cualidad desenvuelto por Vallés en sus *Etudes philosophiques sur la science du calcul*, 1841), las rotaciones de la unidad que permiten representar por radios igualmente espaciados las raices de la unidad, conforme aparece en el *Essai sur la théorie et l'interpretation des quantités dites imaginaires* de Faure 1845, el concepto de la *suma dinámica* y del *paralelógramo sumatorio,* por el que se refiere la teoría de las imaginarias á la mecánica, como hizo ver Saint-Venant, en fin, la interpretación del imaginarismo en las secciones cónicas, conforme á la teoria de las *cónicas suplementarias* de Poncelet, y otros varios de los conceptos que fueron allegando los geómetras, á partir de los trabajos de Argand y Buée, se encuentran en la obra de Rey y Heredia como materiales que emplea en su grandiosa edificación.

No vamos á insistir en el análisis de obra tan importante, ni á detallar los grandes pensamientos que encierra, ni á poner de relieve la gran síntesis, con unidad de plan, llevada á feliz término sobre la base de la categoría de la cualidad y los tres estados del juicio; porque el evocar el recuerdo de esta obra notable sólo tiene por objeto el sentar los preliminares necesarios para ofrecer á la consideración de los lectores otra nueva obra, que, con singular acierto ha desarrollado en sus dos secciones el distinguido oficial de Carabineros señor Fola, y además porque de esta manera rendimos un justo tributo de admiración al iniciador en España de este desenvolvimiento filosófico-matemático que ha continuado y completado el Sr. Fola.

Rey y Heredia, tomando el asunto de su obra desde sus verdaderos cimientos, parte del concepto de la Aritmética, la Geometría y el Algebra en sí, y más principalmente en la relación que las une en el plan de la ciencia matemática. Respecto del Algebra observa: «que

© Biblioteca Nacional de España

sin ser más universales sus conclusiones respecto de los números que los de la Aritmética, desenvuelve un nuevo y sorprendente poder de análisis, en virtud del cual ninguna de las relaciones derivadas de una relación principal se obscurece ni se borra por el cálculo, como sucede en la combinación de las cifras» «como lengua, alcanza el Algebra esa superioridad á que no tiene derecho como ciencia limitada á número» «Pero el Algebra es más que un lenguaje universal de las relaciones y propiedades de los números..... La universalidad, que sin duda le compete, no es meramente filológica, sino objetiva, y debe de consistir en que realmente trata de cosas que no pueden ser objeto de la Aritmética ni de la Geometría, ni de ambas reunidas, ni separadas». «Es posible, dice después, una especulación suprema acerca de esa conceptualidad pura é independiente de toda materia intuitiva, libre de toda determinación numérica ó extensiva, pero siempre superior á ella y aplicable á ella con perfecta indiferencia respecto á la clase de intuición que se le subordina. Cuando la ciencia matemática llega á tal grado de evolución, que por la aplicación reflexiva del espíritu pueden ser distinguidos en la extensión y en el número los conceptos que el entendimiento puso en ellos espontáneamente, hasta es natural que estos conceptos así reparados se conviertan en una nueva especulación más abstracta y universal, y por lo tanto más elevada y más culminante..... Entonces es cuando brota y crece el Algebra como un nuevo ramo del árbol matemático. Sobre la Geometría y la Aritmética, más humildes y bajas, porque se hallan más cerca del empirismo, se levanta y desarrolla floreciente esa rama de Algebra que las cobija á ambas por igual, y las guarece con su universalidad, y las fomenta y extiende con sus aplicaciones... La Geometría y la Aritmética hermanaban por instinto y no por reflexión, veíase el hecho de la congruencia y esto causaba grande admiración, pero se ocultaba la ley ó concepto *á priori*... Esta armonización suprema estaba, empero reservada al Algebra... Es cierto que si hoy vemos tan adelantada la ciencia algebráica en esa vida de imitación armónica, sólo porque ha realizado en las direcciones opuestas de las rectas la antítesis de lo positivo y lo negativo de los números, sus progresos futuros serán incalculables cuando la veamos expresar, como si se tratase de números, las afecciones cualitativas correspondientes á las direcciones perpendiculares, paralelas y oblícuas, que son propias de las líneas... Lo imaginario, tan injustamente calificado hoy, servirá en los tiempos venideros para armonizar la Aritmética y la Geometría, y dar al Algebra toda la altura é independencia que la crítica le promete, y hacer de la Matemática

© Biblioteca Nacional de España

una gran totalidad, un organismo inmenso... El Algebra ordinaria tendrá que luchar todavía por algún tiempo con el misterio del imaginarismo, y que prodigar sus calificaciones de absurdidad, hasta que ulteriores desarrollos de la ciencia matemática reproduzcan por do quiera el simbolismo imaginario, y hagan de él la trama general del cálculo algebráico».

No continuaremos citando los importantes pensamientos que se encierran en la obra porque á seguir nuestro impulso los citaríamos todos. Vamos á terminar reproduciendo lo que con una modestia que se hermana con la superioridad de su talento, sólo citaremos el breve cuanto elocuente *resumen de toda la obra* que hace.

«Helo aquí presentado en los tres pensamientos que reinan en toda ella.

1.º El símbolo $\sqrt{-1}$ es un signo de perpendicularidad.—Buée [1].

2.º Los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza tan diferente.—*Pascal.*

3.º El cuadro de las categorías del entendimiento indica todos los *momentos* de una ciencia especulativa proyectada, y da hasta su ordenación y régimen.—Kant.

El primero es un pensamiento puramente matemático.—El segundo es de la filosofía matemática.—El tercero de filosofía trascendental».

(Se concluirá).

Z. G. de Galdeano.

VARIEDADES

Enunciados de las cuestiones de la «Nueva Correspondencia Matemática»

21. Se dan en un mismo plano una elipse y otra cónica que pasa por el centro de la primera. Se trazan en la elipse dos diámetros conjugados que la cortan en los puntos A,B,A',B' y que cortan la cónica en los puntos C, D:

1.º Demostrar que la cuerda CD pasa por un punto fijo F, cualquiera que sea el sistema de diámetros conjugados que se haya elegido.

2.º Hallar el lugar que describe el punto F, cuando se supone

(1) Parece que ignorara la simultaneidad del descubrimiento de este matemático inglés con el del matemático francés Argand en 1806.

© Biblioteca Nacional de España

que la cónica gira al rededor del centro de la elipse, permaneciendo esta fija.

3.° Construir los dos lugares precedentes, en el caso particular en que la cónica es una hipérbola equilátera cuyo eje transverso es igual al eje mayor de la elipse y en la que un vértice real coincide con el centro de esta elipse.

(Lille. Concours académique. 1877).

22. Desde un punto A tomado sobre un diámetro de una circunferencia se trazan diversas rectas AB. Se proyecta el punto B de la curva en C, sobre el diámetro OA; después desde el punto B como centro, con BC por radio, se describe un arco de círculo. Hallar el lugar de los puntos D de intersección de este arco con AB.

(H. Brocard).

23. Una parábola MN, variable en magnitud y en posición, toca en su vértice P á una parábola ABC dada. La directriz de la parábola móvil es á cada instante, la recta DE, perpendicular en el extremo de la cuerda PQ. ¿Cuál es el lugar del foco F?

(E. Catalan).

24. En la brújula de inclinación el lugar de las posiciones de equilibrio de la aguja es un cono oblícuo de base circular.

(E. Cesáro).

25 Resolver las ecuaciones

$$x_1 + t = a\,(x_2 + x_3)$$
$$x_2 + t = (a+1)\,(x_3 + x_4)$$
$$x_3 + t = (a+2)\,(x_4 + x_1)$$
$$x_4 + t = (a+3)\,(x_1 + x_2)$$

26. Construir la curva que tiene por ecuación, en coordenadas rectangulares

$$(4a - y)^3 = 27\,a\,(x^2 + y^2)$$

Si se hace rodar esta curva sobre un eje fijo $y = a$ suponiéndose ligado el origen de las coordenadas á esta curva, vendrá á un punto M: Se trata de expresar la distancia P al eje fijo, así como su distancia r al punto de contacto, en función del ángulo en que la curva haya girado.

Si, á partir del punto fijo O, se lleva sobre la perpendicular al eje fijo una longitud $OA = p$, y se traza por A una recta AB paralela

© Biblioteca Nacional de España

á r (MR), de manera que se tenga OA=OB, el punto B describirá una curva cuya ecuación se pide.

(Grenoble, Concours académique. 1878).

27. Construir un triángulo conociendo: 1.º la base. 2.º el ángulo opuesto. 3.º la *longitud comun l* de los *segmentos* determinados por los lados del triángulo, sobre tres paralelas á estos lados que pasan por un mismo punto

(E. Lemoine).

Advertencia importante respecto á las cuestiones propuestas.

Habiéndonos propuesto, como ya dijimos en el núm. 8.º de este periódico, inaugurar una época de actividad para los aficionados á estos ejercicios del espíritu que constituyen las cuestiones de la ciencia matemática, que tienen el privilegio de unir lo útil á lo agradable, puesto que nada hay de más útil que las aplicaciones á que ha llevado y lleva constantemente la *ciencia de la cantidad*, y nada es tan agradable para la inteligencia como llegar á esa posesión plena de la verdad que se llama evidencia, hoy nos proponemos, antes de llevar más adelante nuestro propósito en el que comienzan á favorecernos y honrarnos algunos de nuestros colaboradores (y confiamos en que á su iniciativa ha de seguir la generosa cooperación de otros muchos aficionados á este género de investigaciones), regularizar en cuanto nos sea posible, la publicación de cuestiones, y con este objeto hacemos las advertencias oportunas en la cubierta de este periódico.

Además, con objeto de abreviar el lenguaje, adoptaremos en lo sucesivo, conforme ya hemos comenzado á hacerlo, las anotaciones siguientes:

N. C. M.—Nouvelle Correspondence Mathématique.

J. S. y J. E.=Journal de Malthématiques élémentaires ó spéciales de M. G. de Longchamps.

N. A. M.—Nouvelles Annales de Mathématiques.

A. F.—Association Française,

é iremos agregando á éstas otras abreviaturas, cuando se presente la ocasión de referirnos á otras revistas ó colecciones matemáticas.

Zaragoza. — Imprenta de C. Ariño, Coso, 100, bajos

© Biblioteca Nacional de España