El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

Director: D. Zoel G. de Galdeano

Año I. | Zaragoza 20 de marzo de 1891. | Núm. 3.°

SUR
LES CUBIQUES UNICURSALES

PAR

M. GOHIERRE de LONGCHAMPS,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis

M. Zahradnik (*), le premier, croyons-nous, a observé que *les cubiques unicursales*, caractérisées par un point double, *peuvent être considérées comme des cissoïdes*, et se déduire des *coniques*, comme la cissoïde ordinaire se déduit du *cercle*. Dans un précédent article (**), nous avons montré que la *strophoïde*, la *lemniscate de Bernoulli*, les *conchoïdes*, peuvent être engendrées à la façon de la cissoïde, et nous avons nommé *conchoïdales*, les courbes qui se construisent, point par point, par une loi géométrique, que nous avons donnée. En adoptant ce langage on pourrait donc dire que *les cubiques unicursales sont des conchoïdales*, si le théorème de M. Zahradnik ne souffrait une exception, comme nous allons le montrer.

1. Considérons une cubique unicursale; prenons son point double pour origine des coordonnées: l'équation de la courbe est

---

(*) *Archives de Grunert*, t. LVI, pp. 6-10.—*Nouvelle Correspondance*, t. I, p. 86.
(**) *Nouvelle Correspondance*, t. V, p. 145.

$$\varphi_3(xy) - \varphi_2(xy) = o,$$

φ_3 et φ_2 désignant des fonctions homonogènes, respectivement du troisiéme et du deuxiéme degré. La droite représentée par

$$y = tx$$

coupe la courbe en un point dont l'abscisse est

$$x = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)}.$$

L'équation $\varphi_3(t) = o$ a toujours une racine réelle, θ; donc

$$\varphi_3(t) = (t - \theta)\,(At^2 + Bt + C);$$

et la fraction rationnelle, $\frac{\varphi_2}{\varphi_3}$, peut se décomposer en fractions simples, de telle sorte que

$$x = \frac{mt + n}{At^2 + Bt + C} - \frac{p}{t - \theta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

si θ n'est pas racine de l'équation

$$At^2 + Bt + C = O; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

cas particulier que nous examinerons tout a l'heure. Si nous construisons la droite M et la conique M', ayant pour équations:

$$y = \theta x + p,$$

$$my + nx = Ay^2 + Bxy + Cx^2;$$

une droite, menée par l'origine O, rencontrera la droite M en A, la conique M' en B, la cubique en C; donc, d'aprés l'équation (1),

$$OC = OB - OA = BA;$$

ce qui démontre, *dans le cas général,* le théoréme de M. Zahradnik.

2. Supposons, maintenant, que θ soit racine de l'équation (2): deux cas sont á distinguer dans cette hypothése, parce que θ peut étre racine simple ou racine double.

Si θ est racine simple, on peut poser

$$\varphi_3(t) = (t - \theta)^2 (At + B),$$

et, par suite,

$$\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} = \frac{mt + n}{(t - \theta)^2} - \frac{p}{At + B}.$$

Le raisonnement que nous avons fait précédemment s'applique encore á ce cas particulier, avec eette circonstance, que la conique, qui sert á engendrer la cubique, á la façon des conchoïdales est *une parabole.*

Mais il n'en est plus de même dans la seconde hypothése. On a, dans, ce cas,

$$\varphi_3(t) = A(t - \theta)^3;$$

et, par suite,

$$\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} = \frac{m}{(t - \theta)^3} + \frac{n}{(t - \theta)^2} - \frac{p}{(t - \theta)};$$

m étant, comme on le sait, *différent de zéro.* Il est donc impossible de mettre, dans ce cas singulier, la valeur de x sous la forme (1), condition nécessaire pour qu'on puisse conclure le théorème qui nous occupe.

3. D'aprés cela: *toutes les cubiques unicursales sont des conchoïdales de coniques, excepté celles qui admettent la droite de l'infini pour asymptote triple.* En se reportant á l'analyse de M. Zahradnik, il est facile de reconnaitre qu'elle est en défaut dans le cas particulier signalé, Pour identifier, en effet, comme le veut cette démonstration ([1]), les deux équations

([1]) *Loc. cit.*

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(mx + ny + p) - (mx + ny)(dx + ey) = o, \qquad \text{(A)}$$

$$a_1x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1y^3 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 = o, \qquad \text{(B)}$$

dans le cas où (B) est de la forme

$$(\alpha x + \beta y)^3 + \varphi_2(xy) = o,$$

on devrait avoir,

$$(ax^2 + bxy + cy^2)\ (mx + ny) = (\alpha x + \beta y)^3;$$

par conséquent

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{6};$$

et l'équation (A) serait décomposable, l'un des facteurs étant

$$mx + ny = o.$$

Il est donc impossible d'identifier la cubique donnée (B) avec (A).

4. Nous avons indiqué, dans l'article cité, une construction qui permet de tracer la tangente en un point quelconque d'une conchoïdale. Il résulte, de cette remarque et de ce qui précède, qu'on pourra, par une régle trés-simple, construire la tangente en un point pris sur une cubique unicursale.

Ayant pris le point double O, *pour origine des coordonnés, on construit la droite* M *et la conique* M′, *déduites de l'équation proposée, comme il a été dit plus haut. Par* O, *on fait passer une droite rencontrant la droite* M *et la conique* M′, *respectivement aux points* A *et* B; *on prend* OC = AB: *le point* C *est un point de la cubique.*

Pour avoir la tangente en ce point, on méne la tangente à l'ellipse, au point B, *jusqu' à sa rencontre en* M *avec la droite* M; *on prend* BN = BM: NC *est la tangente cherchée* (lám. II, fig. 1.ª).

Les *tangentes au point double* s'obtiennent d'ailleurs en joignant celui-ci aux points de rencontre de M et de M′. Les points de contact des tangentes paralléles á l'asymptote s'obtiennent en joignant le point double aux points de contact des tangentes á M′, paralléles á M, et prenant, sur ces rayons vecteurs, par la construction ordinaire, les points de la cubique.

6. La construction des cubiques unicursales, point par point, et celle de la tangente en un point pris sur la courbe, dépendent de la connaissance d'une droite et d'une conique, préalablement déterminées. Il est facile de voir qu'elles sont *indépendantes du choix des axes* (lámina II, fig. 2.ª).

Soient : O le point double de la cubique proposée, C la conique, AB la droite que l'on déduit de l'équation de celle-lá, comme nous l'avons expliqué. Menons, en O, la tangente á C, et prenons $OE = OD$: E est un point de la cubique. Menons, par le point E, une paralléle A′B′ á AB. Nous allons montrer que A′B′ est une des asymptotes de la courbe : il n'y a pas d'autre asymptote réelle si, comme nous le supposons pour fixer les idées, la conique C est une ellipse.

Ayant mené, par le point O, une droite quelconque; ayant pris, comme l'indique la figure, $OG = FB$, le point G est sur la cubique; abaissons les perpendiculaires GA, OO′, FF′ sur AB; GA′ sur A′B′. Nous aurons

$$GA' = OO' - FF'.$$

Si le point B s'éloigne á l'infini sur AB, FF′ a pour limite OO′; donc

$$\lim GA' = O :$$

A′B′ est une asymptote. Ainsi, *la droite* AB *est paralléle á l'asymptote* A′B′, *et le point double de la cubique est á égale distance de ces deux droites.*

La droite AB étant ainsi déterminée et la cubique étant donnée, on pourra construire, point par point, la conique C, laquelle est donc ellemême déterminée.

Nous ferons observer, en terminant, que ces considérations s'appliquent généralement aux courbes unicursales de degré quelconque, courbes de degré m, ayant un point multiple d'ordre $(m - 1)$. Par exemple les quartiques unicursales peuvent, en général, et sauf des exceptions faciles á formuler, se déduire de deux coniques, à la manière des conchoïdales.

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

En estas consideraciones fundó Brianchon la teoría de los polos, que desarrolló (según indica en una nota de la memoria que estamos diseñando) en el cuaderno 13 del *Journal de l'École Polyctenique*, 1806. Suponiendo dos triangulos abc y ABC tales, que uniendo los vértices a y A, b y B, c y C sus intersecciones concurran en un punto S; para demostrar que las intersecciones de ab y AB, bc y BC, ac y AC concurren en los puntos P, R, Q, situados en línea recta (lám. I, fig. 2), le basta la consideración del exágono $MbBNcCM$ (M y N son las intersecciones de AC y ab, de AB y ac prolongadas) (*) pues encontrándose Mb y Nc, bB y cC, BN y CM en los puntos a, S, A, que por hipótesis están en línea recta, también el exagono $MbcNBCM$ (**) tendrá la misma propiedad, es decir, que las intersecciones P, R y Q de los lados Mb y NB, bc y BC; cN y CM tambien estarán en línea recta, y la correlación de los dos exágonos establece la propiedad recíproca, de manera que: *cuando dos triángulos se hallan colocados de modo que combinando cada lado del primero con los del segundo para obtener sus puntos de intersección, éstos se encuentran en una alineación, si se unen con rectas, dos á dos, los vértices opuestos á los lados así combinados, y en el mismo orden, dichas rectas, en número de tres, concurrirán en un punto.*

También, como observa Brianchón, las rectas trazadas desde un punto á los vértices de un triángulo situado en el mismo plano per-

(*) Para sencillez, siguiendo el orden de las letras, podemos llamar á los lados Mb, bB, etcétera, 1, 2, etc., y los lados Mb y Nc serán 1 y 4, etc.

(**) En este caso Mb y NB que se encuentran en P son los lados 1 y 4, bc y BC son 2 y 5, cN y CM son 3 y 6.

miten representar un cuadrilátero con sus diagonales, determinando este sistema sobre una transversal arbitraria seis puntos ligados por las siete relaciones fundamentales, y al deformarse el triángulo de modo que cinco de estos puntos queden fijos, el sexto no cambiará de situación.

Cuando los puntos X é Y, así como los U y Z del cuadrilátero arriba considerado se reunen en uno solo, (lám. I, figs. 1 y 5) las siete relaciones se reducen á cuatro, coincidiendo los puntos C y D de la figura primitiva, en la que el cuadrilátero $UZYX$ ha desaparecido, obteniéndose un triángulo circunscrito THE tangente en U y X, y resulta que: *si se deforma una cónica sujeta á pasar por dos puntos conocidos* (A. B) (lám. I, fig. 5) *y á tocar á las dos rectas* (TU, TX) *dadas en posición, la cuerda de contacto* (UX) *girará sobre un punto fijo* C.

Además, (lám. I, fig. 5) este punto fijo se halla determinado por dichas ecuaciones, que son de segundo grado y dan dos puntos C, K, ligados por la proporción $\frac{EC}{EK} = \frac{FC}{FK}$ ó $\frac{AC}{AK} = \frac{BC}{BK}$ (cuando el punto K se halla en el interior de la cuerda AB, se obtiene por la intersección de ésta con la cuerda UV que une el punto de contacto U al V del triángulo circunscrito THE). Pero si se hace ahora variar las dos tangentes que pasan por los puntos E y F, girando alrededor de éstos, las ecuaciones no variarán, ni por consiguiente los puntos C y K, y entonces todas las cónicas obtenidas sobre la cuerda AB forman dos sistemas distintos, de modo que en el primero, las cuerdas de los contactos oscilan alrededor del punto C y en el segundo, alrededor del punto K (figs. 5 y 6). Teniendo, pues, en una recta los cuatro puntos A, B, E, F, (figs. 6 y 7) y los dos puntos de construcción C, K determinados por las fórmulas fundamentales, si se trazan desde los puntos E, F pares de tangentes que tocan á la curva en pares de puntos X y V, U y W, las cuerdas de contacto UX y VW se cruzarán en uno de los puntos C, K y las otras dos UV y XW en el otro. Estos dos pares de tangentes forman un cuadrilátero completo cuyas tres diagonales se cortan en C, K, c, puntos de los cuales solo el c varía con la curva, y se encuentra en la intersección de las cuerdas de contacto UW y XV. Si ahora suponemos fijos los dos pares de tangentes, (figuras 6 y 7) y deformamos la curva de manera que permanezca tangente á aquéllas, los dos pnntos A, B, variarán conservando la relación

$\frac{AC}{AK} = \frac{BC}{BK}$ anteriormente establecida, y las seis cuerdas de contacto *UX*, *VW*, etc., girarán dos á dos alrededor de los tres puntos fijos *C*, *K*, *c* determinados por las tres diagonales del cuadrilátero circunscrito. Pero en virtud de la teoría de los *polos*, en un cuadrilátero inscrito *UXVW* cada uno de los puntos *C*, *K*, *c*, es el polo de la recta que une los otros dos; luego *en todo cuadrilátero completo circunscrito á una cónica, cada una de las tres diagonales, es la polar del punto de intersección de las otras.*

Esto conduce inmediatamente á la determinación de las cónicas por medio de la regla ó alineaciones, según el propósito de Brianchón, en su célebre Memoria, que es un hermoso ejemplar de la geometría de la regla, pues si las tres diagonales del cuadrilátero circunscrito se encuentran en *C*, *K* y *c* (fig. 8), y se traza una cuerda *ux* que tienda hacia uno de éstos *C*, y por los extremos *u*, *x* se trazan á uno de los polos *x*, por ejemplo, rectas, que encontrarán á la curva en los puntos *u*, *w* respectivamente, los tres puntos *C*, *V*, *W* se hallarán alineados, y las rectas *uw*, *xu* concurrirán en el tercer polo *c*.

Ahora, determinando los cuatro puntos *u*, *x*, *v*, *w* seis cuerdas que tienden, dos á dos, hacia uno de los tres puntos fijos *C*, *K*, *c*, en virtud de la propiedad de los polos, cada una, *ux*, de estas cuerdas se hallará dividida armónicamente por su punto *C* y por la polar *Kc*, de manera que las dos rectas trazadas desde los puntos *u*, *x* á los extremos de una de las diagonales que concurren en *C*, se cortarán en *Kc*, y conociendo uno solo de los cuatro puntos *u*, *x*, *v*, *w*, se determinarán los otros tres por simples intersecciones de líneas rectas.

Por otra parte, si por ejemplo *u* coincide con uno de los puntos *B* en que la curva está cortada por una de los tres diagonales del cuadrilátero completo, el punto *w* concurrirá también con *B*, y *x*, *v* se confundirán con el segundo punto *A* en que ésta diagonal corta á la sección cónica, cruzándose las tangentes en *B* y *A* en el punto *c* de intersección de las otras diagonales. En fin, si se deforma una cónica sujeta á tocar cuatro rectas cualesquiera, las seis cuerdas de contacto, varían girando dos á dos sobre los tres puntos fijos determinados por las intersecciones de las diagonales del cuadrilátero completo que forman los cuatro tangentes dadas; luego, si por una condición cualquiera, una sola de estas seis cuerdas se hubiese fijado, las demás también lo estarían, obteniéndose los cuatro puntos de contacto por simples intersecciones de líneas rectas, como sucedería en el problema: *inscribir en un cuadrilátero dado una cónica tal, que la cuerda de contacto de dos lados determinados, pase por un punto conocido*, problema que se construye con la regla solamente.

No vamos á enunciar la serie de problemas que se resuelven en la Memoria de Brianchón, como por ejemplo, *describir una cónica de la que se conocen cinco puntos*, cuya solución se halla basada en las ecuaciones fundamentales; *circunscribir á un pentágono dado una cónica*, cuya solución se funda en determinar un sexto punto por medio del exágono inscrito. Lo indicado basta para formarse idea de la importancia que tiene esta breve síntesis hecha con elegancia y unidad de método de la doctrina desenvuelta hoy en los tratados llamados de Geometría moderna, proyectiva ó superior, y tendrá mayor importancia para nosotros por cuanto esta Memoria va á presentársenos como el gérmen sobre el que se han desenvuelto los trabajos más importantes de los geómetras á quienes se debe la evolución realizada en esta rama de la Matemática, durante la primera mitad de este siglo. Y con frecuencia será necesario el recordar algunas de estas páginas, al dar idea de vastísimos desarrollos fundados en los solos principios que guiaron á Brianchón, no sin manifestar que además de esta célebre Memoria, debe citarse como otro timbre de gloria para este esclarecido geómetra, á saber, su importante trabajo insertado en el cuaderno XII del *Journal de l'École Polytecnique*, donde estableció, basándose en el principio de Pascal, toda la teoría de los polos y de las polares de las secciones cónicas.

(Se continuará).

ALGEBRA AN ELEMENTARY TEXT-BOOK

by G. Chrystal, profesor in the University of Edinburgh

(CONTINUACIÓN)

Después de exponer las transformaciones fundamentales de las funciones enteras, para llevar más adelante los procedimientos combinatorios del cálculo algébrico, tiene que establecer nuevos conceptos, que definir nuevas entidades, como son los números negativos, irracionales é imaginarios. Los primeros son múltiplos positivos ó negativos de 1; los segundos, que poseen una existencia actual no siendo susceptibles de representarse exactamente por ninguna expresión aritmética, y en cuanto á los últimos, para que subsista la generalidad de las operaciones algébricas, es preciso *introducir una unidad ideal* i *definida por la expresión* $i^2 = -1$, y estas nuevas cantidades, añade, como las demás deben sujetarse á todas las leyes ordinarias del Álgebra, ya combinadas entre sí ó con cantidades reales.

En la teoría de las expresiones irracionales es de gran importancia la determinación de los factores que las hacen racionales, y éstos *(rationalising factors)* son objeto de un capítulo á ellos exclusivamente destinado.

En el caso de la expresión binomia

$$ap^{\alpha/\gamma} \pm bq^{\beta/\delta},$$

si m es el mínimo común múltipo de γ y δ, el factor que la hace racional es

$$x^{m-1}+x^{m-2}y+\ldots+xy^{m-1}+y^{m} \text{ (siendo } x=ap^{\frac{\alpha}{\gamma}},\ y=bq^{\frac{\beta}{\delta}})$$

Si la expresión irracional es $I=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, el factor que la hace racional es

$$\{p+q-r-2\sqrt{pq}\}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$

En cuanto á la forma de las funciones enteras, *puede ser expresada por la suma de un término racional y múltiplos racionales de* $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, *y por sus productos* $\sqrt{(pq)}$, $\sqrt{(pr)}$, $\sqrt{(pqr)}$, etc.

En general: *Toda función entera de* $p^{1/n}$ *puede reducirse á la forma*

$$A_0+A_1p^{1/n}+A_2p^{2/n}+\ldots+A_{n-1}p^{(n-1)/n},$$

en la que A_0, A_1,... A_{n-1} *son racionales.*

Toda función entera de $p^{1/n}$, *puede reducirse á la forma*

$$A_0 + A_1 p^{1/n} + A_2 p^{2/n} + \dots + A_{n-1} p^{(n-1)/n},$$

en la que $A_0, A_1, \dots A_{n-1}$ *son racionales respecto á* $p^{1/n}$.

Toda función entera de $p^{1/l}$, $q^{1/m}$, $r^{1/n}$, *puede expresarse como una función lineal de*

$$p^{1/l},\ p^{2/l},\ \dots,\ p^{(l-1)/l};\ q^{1/m},\ q^{2/m},\ \dots,\ q^{(m-1)/m};\ r^{1/n},\ r^{2/n},\ \dots,\ r^{(n-1)/n}, \text{ etc.}$$

y de los productos de estas cantidades, siendo racionales los coeficientes respecto de $p^{1/l}$, $q^{1/m}$, $r^{1/n}$, etc.

Además, *siempre puede obtenerse un factor que haga racional la expresión*

$$A_0 + A_1 p^{1/n} + A_2 p^{2/n} + \dots + A_{n-1} p^{(n-1)/n},$$

Así, para el caso $n=3$, ó $P = A_0 + A_1 p^{\frac{1}{3}} + A_2 p^{\frac{2}{3}}$, se tiene

$$p^{\frac{1}{3}} P = pA_2 + A_0 p^{\frac{1}{3}} + A_1 p^{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad p^{\frac{2}{3}} P = pA_1 + pA_2 p^{\frac{1}{3}} + A_0 p^{\frac{2}{3}},$$

sustituyendo en los segundos miembros x por $p^{\frac{1}{3}}$, y por $p^{\frac{2}{3}}$, eliminando después x é y en las tres ecuaciones obtenidas, y después sacando P como factor de los términos que multiplica, el cual es el factor buscado,

$$(A_0^2 - pA_1A_2) + (pA_2^2 - A_0A_1) p^{\frac{1}{3}} + (A_1^2 - A_0A_2) p^{\frac{2}{3}},$$

y la expresión hecha racional.

$$A_0^3 + pA_1^3 + p^2A_2^3 - 3pA_0A_1A_2.$$

En cuanto á los números complejos cuya representación gráfica, según el procedimiento de Árgand se emplea en la obra de Mr. Chrystal, los problemas fundamentales son los concernientes á los números complejos, á sus módulos, y sobre todo el que establece que los resultados de las operaciones algébricas efectuadas con los números complejos, son números también de esta forma.

(Se concluirá).

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÉGLE ET DE L'EQUERRE

par M. G. de Longchamps

En el número anterior de este periódico hicimos una breve indicación sobre la importantísima obra que acaba de publicar el profesor M. de Longchamps, y prometimos dar cuenta más detallada de este nuevo libro, útil bajo muchos conceptos, lo que vamos á hacer, de manera que siquiera queden señalados algunos de los puntos capitales, y los más indispensables para dar á conocer el caracter y alcance de esta Geometría práctica.

El *Ensayo sobre la geometría de la regla y de la escuadra* tiene ese caracter eminentemente gráfico de la geometría pura que fijaron los geómetras griegos, y que ha ido progresando en los tiempos modernos, alguna vez eclipsada por las brillantes aplicaciones del análisis á esta rama de la matemática.

Hoy, que merced á la adivinación de los porismas de Euclides, llevada á feliz término por Chasles, ha llamado preferentemente la atención de los geómetras esta rama de la geometría, sirviendo las obras de problemas, así como las revistas ó periódicos matemáticos de ocasión favorable para hacer escursiones fructuosas por tales dominios de la ciencia, es de gran oportunidad y provecho para el aficionado á estos estudios, el publicar una obra que dé á conocer las aplicacio, nes útiles é inmediatas de aquellas teorías. Y esto es lo que se advierte en la obra de M. de Longchamps.

El teorema de Gergonne acerca de la relación de segmentos formados en los lados de un triángulo por tres rectas concurrentes en un punto y que parten de los tres vértices; el teorema de Menelaus, de constante aplicación, como se sabe, en la Geometría llamada moderna ó proyectiva, caracterizada por la relación anarmónica, que establece

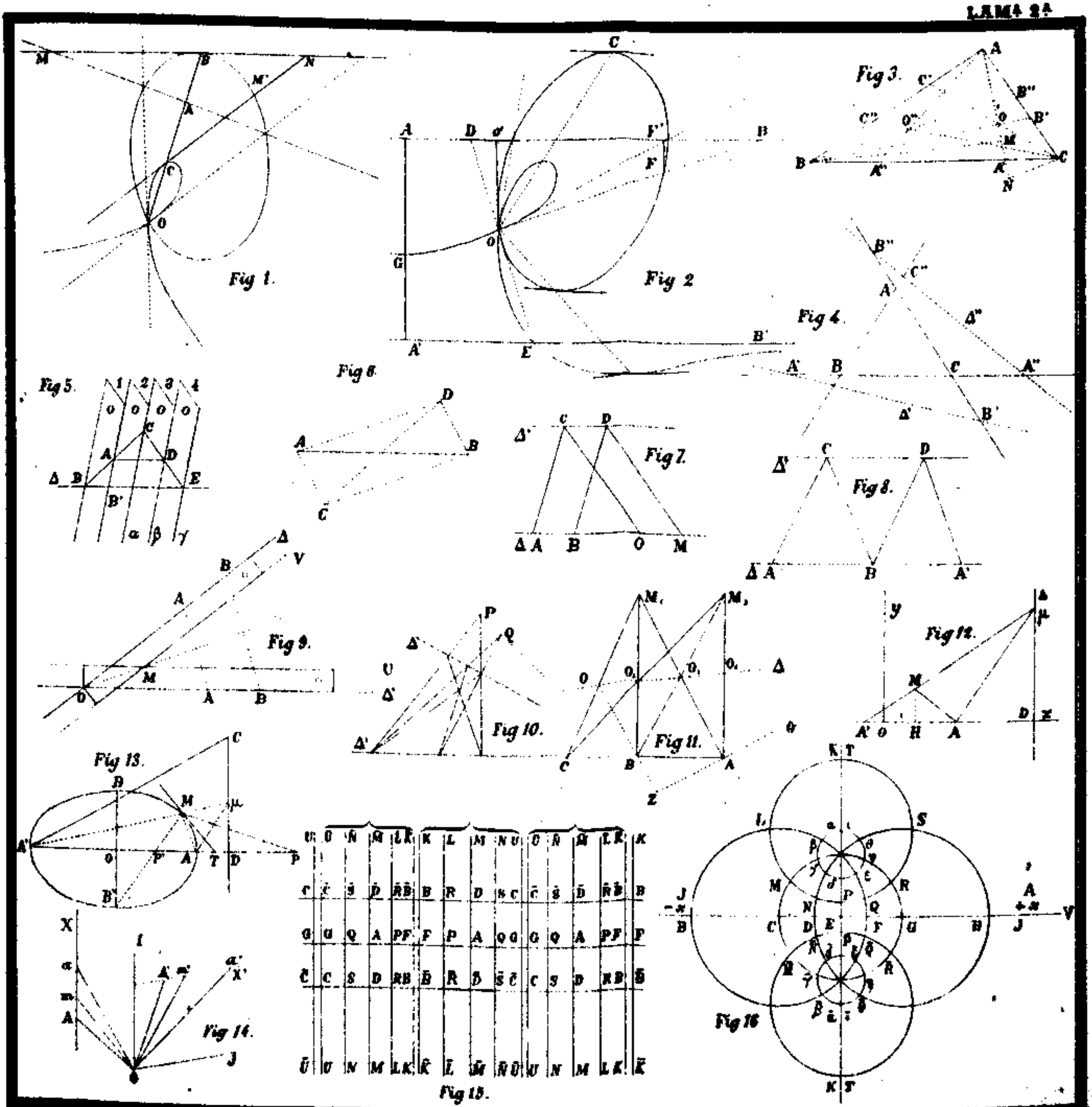
Fig 1.
Fig 2
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 6
Fig 7.
Fig 8.
Fig 9.
Fig 10.
Fig 11.
Fig 12.
Fig 13.
Fig 14.
Fig 15.
Fig 16

también una relación entre los segmentos que forma una transversal en los lados de un triángulo; el teorema de Desargues, acerca de los dos triángulos cuyos lados correspondientes se encuentran en línea recta, y en el cual Poncelet fundó su teoría de las figuras homológicas; en fin, el lema XII de la colección de Pappus, son las proposiciones fundamentales en la obra de M. de Longchamps, á las que agrega su teoría de los *puntos* y de los *triángulos recíprocos*.

Veamos cómo estas diversas proposiciones se enlazan para constituir los fundamentos de la Geometría de la regla y de la escuadra.

Por el teorema de Juan de Ceva se sabe que: si las rectas AA′, BB′, CC′ (lám. II, fig. 3) concurren en un punto O′, se tiene la relación de segmentos

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

Si ahora consideramos en el triángulo ABC el punto A″ simétrico del punto A con relación al punto medio de BC. La recta AA″ y las análogas BB″, CC″ concurrirán, según el teorema recíproco del citado, en un punto O″. Estos dos puntos asociados entre sí de manera que por el uno resulta determinado el otro son los puntos llamados *recíprocos* por M. Longchamps. (1)

Si ahora se considera una transversal Δ' (lám. II, fig. 4) en el plano de un triangulo ABC que corta á los lados de éste en los puntos A′, B′, C′, determinando sus puntos simétricos A″, B″, C″ con respecto á los lados BC, CA, AB, por satisfacer la relación

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = -1,$$

determinarán la recta Δ'' *recíproca* de la Δ'.

Además, las coordenadas $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de dos puntos (2) recíprocos O′ y O″ (lám. II, fig. 3) satisfacen á la relación

$$\alpha'\alpha'' = \beta'\beta'' = \gamma'\gamma'',$$

(1) *Annales scientifiques de l'École Normal supérieure*, t. III; Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie.

(2) Entiéndese aquí por coordenadas los números que miden las áreas de los triángulos BO′C, AO′C, AO′B.

pues en los dos triángulos BO'A, CO'A se verifica

$$\frac{BO'A}{CO'A}=\frac{\gamma'}{\beta'}=\frac{BM}{CN}=\frac{BA'}{CA'},$$

y para el punto O″,

$$\frac{BO''A}{CO''A}=\frac{\gamma''}{\beta''}=\frac{BA''}{CA''}.$$

Además, BA″=CA″ y BA″=CA',

por consiguiente $\frac{\gamma'}{\beta'}=\frac{\beta''}{\gamma''}$ y $\beta'\beta''=\gamma'\gamma''$, etc.

En fin, el porisma IV de Euclides (1) y el porisma XXIX (2), el primero que, en los tratados de Geometría moderna suele enunciarse, considerándose un triángulo cuyos tres lados giran alrededor de tres polos en línea recta, mientras dos de sus vértices recorren dos rectas; el segundo que es uno de los casos del exágono inscrito dos rectas, respecto al cual Pappus dió los enunciados de los lemas XII, XIII, XV y XVII (3).

Todas estas proposiciones sirven de fundamento á la obra de M. Longchamps, de la cual vamos ahora á citar algunos de los problemas que en ella se resuelven empleando la regla y la escuadra solamente.

Para *trazar por un punto* A (lám. II, fig. 5) *una paralela á una recta* Δ, basta colocar la regla plana en las posiciones sucesivas 1, 2, 3, 4.

El trazado de las rectas BAC y CD determina la paralela buscada AD.

Para *dividir un segmento* AB *en dos partes iguales*, con la regla y la escuadra (4) se trazan paralelas que forman un paralelógramo, en el

(1) Chasles.—*Les trois livres de porismes*, pág. 102.

(2) Idem, pág. 190.

(3) De estas cuestiones nos ocupamos en nuestra Geometría y en nuestros *Estudios críticos sobre la generación de los conceptos matemáticos*, cuaderno 2.°

(4) Servois empleaba la *fausse équerre*, figura formada por dos rectas que forman un ángulo fijo diferente del ángulo recto.

que AB es una diagonal (lám. II, fig. 6). La otra diagonal CD divide á AB en dos partes iguales.

Para *transportar un segmento* AB *á partir desde un punto* O *de la recta en que se halla* (lám. II, fig. 7), basta trazar una recta Δ' paralela á Δ formando los paralelógramos ABCD, CDOM, resultando OM=AB.

El *punto simétrico* de un punto A con relación á otro punto B, se obtendrá (lám. II, fig. 8) construyendo los paralelógramos ABDC y CDBA'.

La *bisectriz* de dos direcciones dadas se obtiene colocando la regla plana en dos posiciones (lám. II, fig. 9), siendo OM dicha bisectriz.

Para unir un punto P (lám. II, fig. 10) al punto de intersección de dos rectas Δ y Δ', el trazado que se indica en la figura indica suficientemente el procedimiento, fundado como se ve en las proposiciones de Pappus ó en las modernas teorías del polo y la polar, ó de la relación armónica en el cuadrilátero completo, etc.

Continuando este procedimiento se halla igualmente, con el solo empleo de la regla, el conjugado armónico ω de otro punto ω' con relación á un segmento OO', y el sexto punto de una involución en la que están dados los otros cinco, haciendo aplicación del cuadrilátero completo y el teorema de Desargues.

Para dividir una recta en partes iguales, expone M. Longchamps las soluciones debidas á Servois y á MM. Cremona y Baehr, para las cuales observa se necesitan la regla y la escuadra ó la regla plana. De éstas indicaremos algo de la del Sr. Cremona.

Este notable geómetra supone conocido el punto C simétrico del A con respecto al B (lám. II, fig. 11), como la de Servois exige la existencia de una paralela á la recta que debe ser dividida.

Esto supuesto, uniendo un punto cualquiera M_1 á los puntos A, B y C, la construcción indicada en la figura hace ver que se tiene $O_1O_2=O_2O_3$.

Las rectas CO_2 y BO_3 determinan otro punto M_2; éste permite obtener otro O_4, y así sucesivamente.

Respecto al trazado de las cónicas, solo indicaremos el relativo á la elipse que se funda en el siguiente teorema:

«Sean AA' un eje de una elipse Γ; tómese en Γ un punto M, y únase este punto á los extremos A, A' del eje así considerado: la perpendicular á AM, en el punto A encuentra á A'M en μ; el lugar de μ es una recta Δ perpendicular á AA'».

Para demostrar esta proposición obtenida por M. Longchamps en un estudio de geometría comparada, á que llamó *transformación recíproca* (1) considera un punto M en una elipse cuyos ejes tienen por longitud respectiva a y b, obteniendo que

$$\frac{MH^2}{AH.A'H}=\frac{b^2}{a^2},$$

y además por los triángulos semejantes de la figura:

$$\frac{MH}{A'H}=\frac{\mu D}{A'D} \text{ y } \frac{MH}{AH}=\frac{AD}{\mu D};$$

por consiguiente

$$\frac{MH^2}{AH.A'H}=\frac{AD}{A'D}; \text{ luego } \frac{AD}{A'D}=\frac{b^2}{a^2}.$$

De esto resulta que el lugar descrito por el punto μ es una recta Δ perpendicular á A'A en un punto D que divide exteriormente el segmento AA' en la relación de los cuadrados de los ejes de la elipse propuesta.

Para construir, pues, la elipse, punto por punto, con ayuda de la regla y de la escuadra. cuando se dan tres vértices A, A', B (lám. II, figura 13), aplíquese al punto B la construcción efectuada en el punto M con las cuerdas AM, A'M: se obtendrá un punto C (siendo recto el ángulo BAC) que pertenece á Δ. Esta recta se obtiene, pues, bajando desde C una perpendicular á AA'.

En fin, si se toma arbitrariamente un punto μ sobre Δ, con la regla y la escuadra, tendremos el punto correspondiente M, y podremos en estas condiciones construir la elipse, punto por punto.

Después de resolver multitud de problemas relativos á la elipse, á la parábola y la hipérbola, prescindiendo de los métodos de Pascal y Brianchón, obtiene M. Longchamps el trazado de las cónicas aplicando las propiedades de los *puntos y transversales recíprocos* que arriba hemos citado.

Así, *cuando un punto* O *se mueve en una recta* Δ, *el punto recíproco* O' *se mueve en una cónica* Γ *circunscrita al triángulo*, pues la ecuacion de Δ en las coordenadas adoptadas (triláteras ó triangulares) es

$$m\alpha+n\beta+p\gamma=0,$$

(1) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1882.

y siendo (α, β, γ) las coordenadas de O y $(\alpha', \beta', \gamma')$ las de O′, se tiene

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Por consiguiente, se obtendrá el lugar descrito por un punto O′, recíproco del O, cambiando α, β, γ por

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$$

en la ecuación del lugar, y á la recta Δ corresponde la curva cuya ecuación es

$$\frac{m}{\alpha} + \frac{n}{\beta} + \frac{p}{\gamma} = 0,$$

cónica circunscrita al triángulo de referencia.

Además, encontrando á AB en un punto C′; la tangente en C á la cónica Γ, los puntos A′, B′, C′ se hallan, según expresa la ecuación deducida, en la recta cuya ecuación es

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} = 0,$$

y para construir una cónica, conociendo cinco puntos A, B, C, D, E, bastará tomar los puntos recíprocos D′, E′ de D, E, con relación al triángulo ABC; y como á todo punto M′, tomado en D′E′ corresponde un punto recíproco M perteneciente á la cónica buscada, ésta puede construirse punto por punto.

Tomando la transversal recíproca de D′E′ que corta al triángulo ABC en los puntos α, β, γ, se obtendrán las tangentes en los puntos A, B, C.

Nada diremos después de esta escursión por la obra de M. Longchamps acerca de las nuevas construcciones que ofrece á los lectores de su obra, aplicadas al trazado de la cisoide de Diocles, á la curva duplicatriz, á la duplicación del cubo por medio de arcos de parábolas á la estrofoide, á la trisectriz de Mac-Laurin, á las cúbicas circulares unicursales, al folium de Descartes, la serpentina, el tridente de Newtón, la curva de Agnesi, las cúbicas diversas, la conçoidal circular y las diferentes especies de cuárticas, que son asunto desenvuelto en la primera parte de su obra, como en la segunda trata de la aplicación á los problemas de la agrimensura y al arte de la guerra. Los numerosos é importantes detalles desenvueltos en obra tan original como útil, no pueden ser conocidos por una mera reseña, sino por un estudio directo en el libro de M. Longchamps.

Z. G. DE GALDEANO.

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

publicado pelo Dr. Francisco Gomes Teixeira

Uno de los hechos que en la actualidad se presentan como testimonio de cultura y progreso de las diversas naciones, como prueba inconcusa de su actividad científica, es la existencia de publicaciones consagradas á la Matemática, ya en sus desarrollos puramente teóricos, ya en la infinidad de sus aplicaciones; y esta prueba, y este indiscutible testimonio de los hechos no podía faltar á nuestros ilustrados vecinos los portugueses, que se hallan en ese concierto universal de la ciencia, especie de lazo intelectual que hoy une á los pueblos de más diverso origen, acaso más estrechamente que los vínculos creados por la fuerza, también atractiva de los intereses materiales.

No hay más que dirigir la vista por los diversos tomos publicados desde el año 1879 bajo la ilustrada dirección del antiguo profesor de la Universidad de Coimbra, hoy director de la Academia politécnica de Oporto, para dejar confirmado nuestro aserto.

La inspección de los varios trabajos insertados en esta importante revista, hacen ver cómo concurren á la obra de la ilustración nacional, desde el alumno aventajado, cuya actividad y amor al estudio hace fructificar la enseñanza de sus profesores por medio de originales desarrollos debidos á su individual iniciativa, hasta los profesores, y los individuos de la Real Academia de Ciencias de Lisboa; y el resultado de esta acción común se traduce en importantes investigaciones, donde también colaboran nobles matemáticos extranjeros, por efecto de esta universalidad de la ciencia, que hoy no reconoce más patria que allí donde se piensa y donde se rinde culto á la verdad.

La tesitura en que se han colocado los colaboradores de esta importante publicación, á pesar de ofrecer los más diversos matices, desde el dominio de lo elemental hasta las lucubraciones de orden superior, tienen gran importancia para quien desee, después de poseer los conocimientos generales de las teorías de la Matemática moderna, amplificar éstos con nuevas aplicaciones y desarrollos, que muchas veces en los diversos trabajos ofrecen cierta ilación, en medio de su variedad, que permite llegar á poseer su admirable conjunto y constituir una obra de ilustración nacional.

Entre los geómetras podremos citar los notables matemáticos señores Schiappa Monteiro, Marrecas Ferreira, Craveiro Lopes, tan hábiles en el arte de proponer problemas que excitan la actividad y el interés del público matemático, como en dar las más variadas y elegantes soluciones á los propuestos en este palenque sin fin de las inteligencias.

Difícil en extremo sería dar una idea cabal de lo que exige mucho tiempo y mucho estudio, entre las variadísimas cuestiones resueltas en los tomos de esta revista; sin embargo, citaremos algunas cuestiones, tales son: el determinar los lugares geométricos de los centros de los círculos que cortan á otros dos círculos dados según ángulos dados, que da origen á una interesante discusión desarrollada en varios artículos por el geómetra Sr. La Ponte Horta.

El problema: Dadas tres circunferencias de centros A, B, C de las que las dos primeras tienen una cuerda común IJ, trazar por I una transversal que las encuentre en los puntos X, Y, Z, de manera que XZ y XY se hallen en una razón dada, del cual da una elegante solución el Sr. Craveiro Lopes, fundándose en que: *dadas dos circunferencias que se cortan, si se trazan rectas por uno de sus puntos de intersección, el lugar geométrico de los puntos que dividen en una razón dada los segmentos de éstas determinados por las circunferencias, es otra circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las primeras y cuyo centro divide en la misma razón la distancia de los centros dados*, problema del que dió una solución el célebre geómetra italiano G. Bellavitis por su método de las equipolencias, lo cual, según éste mismo expresa en una carta dirigida al Sr. Gomes Teixeira, no disminuye el mérito del Sr. Craveiro Lopes (1). También el Sr. Schiappa Monteiro insiste en este problema, del cual da una solución empleando el método de las equipolencias, otra sintética elemental, así como desenvuelve notables investigaciones sintéticas y analíticas respecto al círculo variable sujeto á cortar continuamente á dos círculos dados, según ángulos igualmente dados. En el segundo caso, de los círculos no concéntricos, demuestra que: *Una sección cónica cualquiera Σ puede considerarse como la curva recorrida por el centro* o *de un círculo* (x) *variable en magnitud, sujeto á cortar constantemente según ángulos dados* e, i, *dos círculos igualmente dados* (E), (I); *ó á pasar por un punto dado* C_0, *y á cortar, según un ángulo dado* e *un círculo igualmente dado* (E).

Además de establecerse en estas interesantes investigaciones que una sección cónica cualquiera (Σ) puede considerarse como la curva recorrida por el punto de intersección o de dos cuerdas ba'_1 y $b'b'''$, pertenecientes respectivamente á dos círculos dados (E), (I), á los cuales cortan constantemente según ángulos dados e', i', de manera que el punto de intersección considerado equidiste de los extremos b y b' de estas cuerdas, se resuelve el caso en que dos tangentes de dos círculos (E'') (I'') se muevan de manera que la suma algébrica de las distancias τ y τ' de los puntos de contacto á los de intersección o de estas tangentes sea constante, que engendran dos cónicas, lo que le conduce á consideraciones sobre los círculos envolventes, que llama *círculos focales ó focos tangenciales* y sus tangentes τ y τ ó *vectores tangenciales*, ó también, cuando aquéllos se reducen á puntos, los *puntos focales ó focos radiantes* y los vectores correspondientes ó *vectores giratorios ó radiantes*, empleando un tecnicismo especial en sus investigaciones, como el de cónicas *monocicloconfocales* y *monostigmoconfocales*, ó que tienen el mismo círculo focal, etc., investigaciones basadas en los resultados más importantes acerca de estas teorías, obtenidos por los geómetras Poncelet, Clebsch, Hamilton, Grassmann, etc.; y entre otros trabajos del Sr. Schiappa Monteiro, publicados en el *Jornal de sciencias mathematicas*, citaremos por último su original manera de proceder al dividir en partes iguales la distancia entre dos puntos de la circunferencia, empleando el compas ordinario, método que, como se sabe, sirvió á Mascheroni para escribir su célebre obra *La geometría del compasso*.

(1) La solución dada por Bellavitis se encuentra en la *Exposition de la méthode des équipollences*, traducida al francés por M. C. A. Laisant, num. 68.

Además de notables trabajos geométricos, el lector aficionado á las investigaciones del Análisis, encuentra también asuntos nuevos y variados.

El notable talento matemático Sr. Martins da Silva, alferez de artillería, ha mostrado desde el comienzo de su brillante carrera científica, en numerosos trabajos, sus excepcionales aptitudes para esta rama de la Matemática, ya tratando de la transformación de las funciones X_n de Legendre en integral definida, ya en la reducción directa de una clase de integrales definidas múltiples, ya al dirigir sus investigaciones hacia la resolución de las ecuaciones algébricas, obteniendo una fórmula integral relativa á una de las raices imaginarias de estas ecuaciones, seguida de la obtención de las demás; después llega á nuevos resultados sobre los que obtuvo Jacobi acerca de las sumas de las potencias semejantes de las raíces, y respecto al logaritmo de la raíz imaginaria de una ecuación algébrica; y por último, su trabajo sobre las tres relaciones diferenciales dadas por M Lipschitz en la teoría de las funciones elípticas, sirven para mostrar cómo ha contribuído el notable colaborador del *Jornal de sciencias mathematicas* á favorecer el desenvolvimiento científico de su patria.

También el alferez de artillería Sr. J. M. Rodríguez, se distingue por sus notables producciones acerca del Análisis. Sus escritos sobre el algoritmo de las facultades de Wronski, sobre las integrales eulerianas, y otros trabajos relativos á la expresión analítica deducida por M. Hermite, de la serie de Lagrange, á la rotación, etc.

Por último, exige especial mención el activo director del periódico Sr. Gomes Teixeira, conocido ya en numerosas revistas científicas por la variedad de sus originales trabajos, bastándonos citar su método para la integración de las ecuaciones de derivadas parciales lineales de segundo orden, que le sirve de base para sus ulteriores investigaciones; sus aplicaciones de una fórmula que da las derivadas de orden cualquiera de las funciones de funciones, aparte de otras publicadas en el *Giornale di Matematiche*, de Battaglini; su escrito dirigido á M. Lerch sobre la reducción de las integrales hiperelípticas; sus trabajos de divulgación ó de índole didáctica respecto al cálculo, á las funciones y á las teorías de las cantidades imaginarias, de que ha dado más tarde una muy notable muestra con la publicación en 1890 de su «Curso de Analyse infinitesimal», donde se admira, además del método, la feliz agrupación de los conceptos más modernos con que se ha enriquecido el Análisis en estos últimos años. Y para terminar, manifestaremos que la colaboración de escritores tan conocidos como M. Maurice d'Ocagne, que se distingue por sus trabajos geométricos; M. de Lerch (de Praga), que ha modificado la tercera demostración dada por Gauss de la ley de reciprocidad de Legendre, y el Dr. Le Paige, de la Universidad de Liega, que ha desenvuelto las homografías é involuciones de órdenes superiores en las páginas del *Jornal de sciencias mathematicas,* expresan suficientemente cómo contribuyen al progreso matemático nuestros ilustrados vecinos de Portugal, y cómo concurren á esta obra general que en el concierto científico prosiguen las naciones más cultas.

ZOEL G. DE GALDEANO.

LAS EQUIVALENCIAS Y SUSTITUCIONES EN LOS TEOREMAS Y EN LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

(CONTINUACIÓN)

Existiendo cierta vaguedad en el método de invención, cuyos exitos dependen con frecuencia del talento individual empeñado en descubrir nuevas verdades ó relaciones geométricas; influyendo principalmente en tales éxitos la oportunidad de los medios elegidos para llegar á un fin determinado ó la sugestión de alguna idea feliz, claro es que la ciencia había de prevenir estas deficiencias y buscar el modo de suplirlas; y ciertamente que los geómetras antiguos trabajaron en este sentido, como lo manifiestan la colección de los lemas de Pappus y la obra de los porismas de Euclides, que si no ha llegado hasta los tiempos modernos, al menos deja vislumbrarse á través de la adivinación de los mismos llevada á cabo por el geómetra Chasles.

Seguramente que los elementos de Euclides no bastaban para satisfacer las exigencias de los geómetras que debían encontrarse á cada paso con nuevas dificultades en sus investigaciones, cuando éstas los llevaban á cuestiones complejas, y era precisa la existencia de obras complementarias que proveyeran á las necesidades de los investigadores; y esto venía á ser el tratado de los porismas de Euclides, que según Pappus, era una colección de proposiciones de una concepción ingeniosa, de útil auxilio para la resolución de las más difíciles problemas, é indispensable para los que deseen dedicarse á las investigaciones matemáticas. Los porismas contenían, según afirma el geómetra alejandrino, una doctrina sutil, pero natural y necesaria, y sobre todo un estudio muy agradable para los que saben ver y encontrar.

Después de haberse determinado la recta y el círculo con auxilio de los principios generales de la ciencia, según sus propiedades más simples, se llega al caso de obtenerse estos mismos elementos geométricos como resultados de combinaciones más ó menos complicadas de figuras. En estas combinaciones cierto número de elementos queda al arbitrio del geómetra, que en los problemas constituyen los datos y en los teoremas las hipótesis; los elementos restantes son los resultados del problema ó la tesis del teorema. En esta coexistencia de relaciones cabe el hacer pasar las unas de la hipótesis á la tesis, ó de los datos al resultado, y de aquí surgen las variantes indefinidas que ofrecen las cuestiones.

Así, refiriéndonos á la obra de los porismas, vemos que éstos se hallaban clasificados según *las cosas buscadas*, que caracterizan los *géneros*.

Por ejemplo, que *tal punto se halla situado sobre una recta dada en posición*, que *tal recta pasa por un punto dado*, que *tal recta está dada en posición*, etc., son las conclusiones características de otros tantos géneros de porismas.

No habiendo llegado la geometría de los griegos al grado de generalización que tiene en la época actual, las proposiciones empleadas por éstos debían ser muy numerosas, refiriéndose varias de ellas á una misma cuestión, de la cual fueran casos particulares, como observó Chasles, y como se observa al comparar nuestras teorías de la relación anarmónica, de las series homográficas, de la involución, etc., con las proposiciones que nos ha trasmitido Pappus.


fig. 1.ª


fig. 2.ª


fig. 3.ª

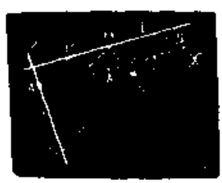
fig. 4.ª

Así, por ejemplo, los porismas I, III, IX. (figs. 1.ª, 2.ª y 3.ª) corresponden á la determinación de la recta Sm perteneciente al cuadrilátero Sabm, cuando se dan la recta ab, que gira alrededor del punto p y los demás elementos de la figura supuestos fijos.

Nada menos que diez porismas necesitó Euclides para esta determinación de la recta, que según manifiesta Chasles se hallan contenidos en este solo enunciado: *Dadas cuatro rectas que se cortan dos á dos, si se dan tres de los puntos de intersección situados en una de ellas, ó solamente dos, en el caso del paralelismo* (es decir, si permanecen fijos), *y de los otros tres dos se sujetan á hallarse en una recta dada, el tercero se hallará situado también en una recta dada en posición.*

Consideremos ahora los dos porismas XI y XII, correspondientes al género caracterizado por la relación $\frac{Am}{A'm'}=\lambda$.

En el porisma XI dos rectas giran alrededor de los puntos P y Q, teniendo su punto de intersección M (fig. 5.ª) en una recta fija LM, y se establece la posibilidad de hallar una recta A'X', y en ésta un punto A' tal, que el segmento Am determinado en una recta fija Am dada, y á contar de un punto A fijo en ésta se halle con A'm' en una razón dada.

fig. 5.ª

El porisma XII (fig. 4.ª) es una variante del anterior, que resulta de suponerse el punto P en el infinito según las ideas modernas; por esto en la hipótesis se considera la oblicua Mm formando un ángulo dado con la LM (lo que equivale á decir que es paralela en todas sus posiciones sucesivas). Y de igual manera que, por ejemplo, en la geometría elemental el teorema: *Si dos rectas forman con otra ángulos alternos internos iguales, son paralelas*, se demuestra fundándose en el caso expresado por el siguiente: *Dos perpendiculares á una recta son paralelas*, para establecer dichos porismas, es preciso hacer depender la posición variable de las rectas de la posición particular PcQ (fig. 5.ª) ó AaQ (fig. 4.ª) de que se parte en el razonamiento.

Para establecer el porisma XI esta posición permite aplicar los lemas III y XI (1).

(Se continuará).

(1) *Les trois livres de porismes.*—Chasles, (págs. 114 y 115).

Los lemas III, X, XI, XIV, XVI y XIX, establecen la igualdad de las relaciones anarmónicas que cuatro rectas trazadas desde un punto determinan en dos transversales. El lema III expresa el caso general, el XI el en que una de las transversales es paralela á una de dichas rectas.

Estas consideraciones se hallan indicadas en nuestra *Geometría elemental*.

Zaragoza.—Establecimiento tipográfico de Julián Sanz.