ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 7 JULIO 1896

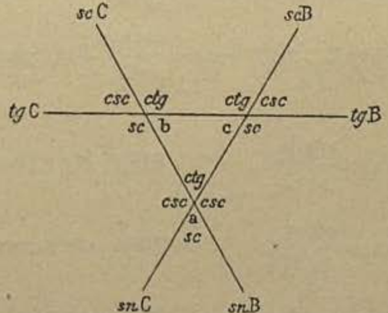
SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó. (*Continuación.*)—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansion. (*Continuación.*)—Movimiento armónico, por P. G. Tait. (*Continuación.*)—Curiosidades.—Soluciones de cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

(*Continuación.* Véase pág. 105)

Pueden asimismo resolverse los triángulos esféricos rectángulos mediante el

Diagrama 14



formado con los números trigonométricos *sc*, *tg* y *sn* de los ángulos oblicuos C, B del triángulo, y con los conúmeros *ctg* y *csc* de los elementos lineales *a*, *b*, *c* del mismo.

Aplicando las reglas establecidas para el diagrama 12, obtendremos

321) $sc\ \mathrm{C} = \dfrac{ctg\ \mathrm{b}}{ctg\ \mathrm{a}}$ 322) $sc\ \mathrm{C} = ctg\ \mathrm{b}\ tg\ \mathrm{a}$

323) $tg\ \mathrm{C} = \dfrac{csc\ \mathrm{b}}{ctg\ \mathrm{c}}$ 324) $tg\ \mathrm{C} = csc\ \mathrm{b}\ tg\ \mathrm{c}$

325) $sn\ \mathrm{C} = \dfrac{csc\ \mathrm{a}}{csc\ \mathrm{c}}$ 326) $sn\ \mathrm{C} = csc\ \mathrm{a}\ sn\ \mathrm{c}$

327) $sc\ \mathrm{B} = \dfrac{ctg\ \mathrm{c}}{ctg\ \mathrm{a}}$ 328) $sc\ \mathrm{B} = ctg\ \mathrm{c}\ tg\ \mathrm{a}$

329) $tg\ \mathrm{B} = \dfrac{csc\ \mathrm{c}}{ctg\ \mathrm{b}}$ 330) $tg\ \mathrm{B} = csc\ \mathrm{c}\ tg\ \mathrm{b}$

331) $sn\ \mathrm{B} = \dfrac{csc\ \mathrm{a}}{csc\ \mathrm{b}}$ 332) $sn\ \mathrm{B} = csc\ \mathrm{a}\ sn\ \mathrm{b}$

333) $ctg\,\mathrm{b} = ctg\,\mathrm{a}\,sc\,\mathrm{C}$ 334) $ctg\,\mathrm{b} = \dfrac{csc\,\mathrm{c}}{tg\,\mathrm{B}}$ 335) $ctg\,\mathrm{b} = csc\,\mathrm{c}\,ctg\,\mathrm{B}$

336) $csc\,\mathrm{b} = ctg\,\mathrm{c}\,tg\,\mathrm{C}$ 337) $csc\,\mathrm{b} = \dfrac{csc\,\mathrm{a}}{sn\,\mathrm{B}}$ 338) $csc\,\mathrm{b} = csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{B}$

339) $ctg\,\mathrm{c} = ctg\,\mathrm{a}\,sc\,\mathrm{B}$ 340) $ctg\,\mathrm{c} = \dfrac{csc\,\mathrm{b}}{tg\,\mathrm{C}}$ 341) $ctg\,\mathrm{c} = csc\,\mathrm{b}\,ctg\,\mathrm{C}$

342) $csc\,\mathrm{c} = ctg\,\mathrm{b}\,tg\,\mathrm{B}$ 343) $csc\,\mathrm{c} = \dfrac{csc\,\mathrm{a}}{sn\,\mathrm{C}}$ 344) $csc\,\mathrm{c} = csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{C}$

345) $ctg\ \mathrm{a} = \dfrac{ctg\ \mathrm{b}}{sc\ \mathrm{C}}$ 346) $ctg\ \mathrm{a} = ctg\ \mathrm{b}\ csn\ \mathrm{C}$

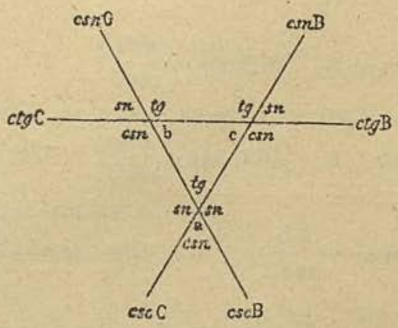
347) $ctg\ \mathrm{a} = \dfrac{ctg\ \mathrm{c}}{sc\ \mathrm{B}}$ 348) $ctg\ \mathrm{a} = ctg\ \mathrm{c}\ csn\ \mathrm{B}$

349) $csc\ \mathrm{a} = csc\ \mathrm{b}\ sn\ \mathrm{B}$ 350) $csc\ \mathrm{a} = csc\ \mathrm{c}\ sn\ \mathrm{C}$

La aplicación de las tres últimas reglas daría resultados idénticos á los expresados en las fórmulas 251 á 270 inclusive.

Igualmente pueden resolverse los triángulos esféricos rectángulos mediante el

Diagrama 15



formado con los conúmeros trigonométricos de los ángulos oblícuos C, B del triángulo, y con los números *tg* y *sn* de los elementos lineales *a*, *b*, *c* del mismo.

Aplicando las reglas empleadas para el diagrama 13, obtendremos

351) $csn\ \mathrm{C} = \dfrac{tg\ \mathrm{b}}{tg\ \mathrm{a}}$ 352) $csn\ \mathrm{C} = tg\ \mathrm{b}\ ctg\ \mathrm{a}$

353) $ctg\ \mathrm{C} = \dfrac{sn\ \mathrm{b}}{tg\ \mathrm{c}}$ 354) $ctg\ \mathrm{C} = sn\ \mathrm{b}\ ctg\ \mathrm{c}$

355) $csc\ \mathrm{C} = \dfrac{sn\ \mathrm{a}}{sn\ \mathrm{c}}$ 356) $csc\ \mathrm{C} = sn\ \mathrm{a}\ csc\ \mathrm{c}$

357) $csn\ \mathrm{B} = \dfrac{tg\ \mathrm{c}}{tg\ \mathrm{a}}$ 358) $csn\ \mathrm{B} = tg\ \mathrm{c}\ ctg\ \mathrm{a}$

359) $ctg\ \mathrm{B} = \dfrac{sn\ \mathrm{c}}{tg\ \mathrm{b}}$ 360) $ctg\ \mathrm{B} = sn\ \mathrm{c}\ ctg\ \mathrm{b}$

361) $csc\ \mathrm{B} = \dfrac{sn\ \mathrm{a}}{sn\ \mathrm{b}}$ 362) $csc\ \mathrm{B} = sn\ \mathrm{a}\ csc\ \mathrm{b}$

363) $tg\,\mathrm{b} = tg\,\mathrm{a}\,csn\,\mathrm{C}$ 364) $tg\,\mathrm{b} = \dfrac{sn\,\mathrm{c}}{ctg\,\mathrm{B}}$ 365) $tg\,\mathrm{b} = sn\,\mathrm{c}\,tg\,\mathrm{B}$

366) $sn\,\mathrm{b} = tg\,\mathrm{c}\,ctg\,\mathrm{C}$ 367) $sn\,\mathrm{b} = \dfrac{sn\,\mathrm{a}}{csc\,\mathrm{B}}$ 368) $sn\,\mathrm{b} = sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{B}$

369) $tg\,\mathrm{c} = tg\,\mathrm{a}\,csn\,\mathrm{B}$ 370) $tg\,\mathrm{c} = \dfrac{sn\,\mathrm{b}}{ctg\,\mathrm{C}}$ 371) $tg\,\mathrm{c} = sn\,\mathrm{b}\,tg\,\mathrm{C}$

372) $sn\,\mathrm{c} = tg\,\mathrm{b}\,ctg\,\mathrm{B}$ 373) $sn\,\mathrm{c} = \dfrac{sn\,\mathrm{a}}{csc\,\mathrm{C}}$ 374) $sn\,\mathrm{c} = sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{C}$

375) $tg\,\mathrm{a} = \dfrac{tg\,\mathrm{b}}{csn\,\mathrm{C}}$ 376) $tg\,\mathrm{a} = tg\,\mathrm{b}\,sc\,\mathrm{C}$

377) $tg\,\mathrm{a} = \dfrac{tg\,\mathrm{c}}{csn\,\mathrm{B}}$ 378) $tg\,\mathrm{a} = tg\,\mathrm{c}\,sc\,\mathrm{B}$

379) $sn\,\mathrm{a} = sn\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{B}$ 380) $sn\,\mathrm{a} = sn\,\mathrm{c}\,csc\,\mathrm{C}$

La aplicación de las tres reglas últimas daría resultados idénticos á los formulados en los números 201 á 220 inclusive.

(Se continuará.)

ERRATAS

Página 82 línea 2 dice diferencia; *debe decir* semidiferencia.
Página 84 línea 4 dice ángulos B, C; *debe decir* ángulos A, B.
Página 104 línea 4 dice números; *debe decir* conúmeros.

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 108)

IV. Aplicaciones

19. *Resolución de la ecuación de tercer grado.* La ecuación

$$z^3 + qz + r = 0,$$

tiene por raíces, como es sabido,

$$z_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

$$z_2 = -\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sqrt{-3},$$

$$z^3 = -\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} - \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sqrt{-3},$$

donde

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}, \quad \mathrm{B} = -\frac{q}{3\mathrm{A}}.$$

Para A se toma uno cualquiera de los tres valores del radical cúbico. En el caso en que q y r son reales, las raíces pueden expresarse por medio de las funciones hiperbólicas ó de las funciones circulares. Prescindimos del caso en que $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} = 0$; en esta hipótesis la ecuación tiene raíces iguales, y se tiene

$$z_1 = \frac{3r}{q}, \quad z_2 = z_3 = -\frac{3r}{2q}.$$

Primer caso principal: $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ *positivo.* I. q *positivo.* Pongamos

$$-\frac{r}{2} = \rho \,\mathrm{Sh}\, t, \qquad \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = \rho \,\mathrm{Ch}\, t.$$

Se tendrá

$$\rho^2 = \rho^2 (\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t) = \frac{q^3}{27}, \quad -\frac{q}{3} = -\rho^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{\frac{q}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}},$$

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\rho\,(\mathrm{Sh}\ t + \mathrm{Ch}\ t)} = \sqrt[3]{\rho e^t} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{t}{3}}, \quad \mathrm{B} = -\rho^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{t}{3}},$$

$$z_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Sh} \frac{t}{3}, \quad z_2 = -\rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Sh} \frac{t}{3} + \sqrt{-3}\, \rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Ch} \frac{t}{3},$$

$$z_3 = -\rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Sh} \frac{t}{3} - \sqrt{-3}\, \rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Ch} \frac{t}{3}.$$

II. *q negativo, r negativo*. Pongamos

$$-\frac{r}{2} = \rho\ \mathrm{Ch}\ t, \quad \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = \rho\ \mathrm{Sh}\ t.$$

Se tendrá

$$\rho^2 = -\frac{q^3}{27}, \quad -\frac{q}{3} = \rho^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{-\frac{q}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}},$$

$$\mathrm{A} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{t}{3}}, \quad \mathrm{B} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{t}{3}},$$

$$z_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Ch} \frac{t}{3}, \quad z_2 = -\rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Ch} \frac{t}{3} + \sqrt{-3}\, \rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Sh} \frac{t}{3},$$

$$z_3 = -\rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Ch} \frac{t}{3} - \sqrt{-3}\, \rho^{\frac{1}{3}} \mathrm{Sh} \frac{t}{3}.$$

III. *q negativo, r positivo*. Pongamos

$$-\frac{r}{2} = -\rho\ \mathrm{Ch}\ t, \quad \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = \rho\ \mathrm{Sh}\ t.$$

Se tendrá

$$\rho^2 = -\frac{q^3}{27}, \quad -\frac{q}{3} = \rho, \quad \sqrt{-\frac{q}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}},$$

$$A = -\rho^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{t}{3}}, \quad B = -\rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{t}{3}},$$

$$z_1 = -2\rho^{\frac{1}{3}} \operatorname{Ch} \frac{t}{3}, \quad z_2 = \rho^{\frac{1}{3}} \operatorname{Ch} \frac{t}{3} + \sqrt{-3}\, \rho^{\frac{1}{3}} \operatorname{Sh} \frac{t}{3},$$

$$z_3 = \rho^{\frac{1}{3}} \operatorname{Ch} \frac{t}{3} - \sqrt{-3}\, \rho^{\frac{1}{3}} \operatorname{Sh} \frac{t}{3}.$$

Segundo caso principal: $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ *negativo.* Pongamos

$$-\frac{r}{2} = \rho \cos \theta, \quad \sqrt{-\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} = \rho \sin \theta.$$

Se tendrá

$$\rho^2 = -\frac{q^3}{27}, \quad -\frac{q}{3} = \rho^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{-\frac{q}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}},$$

$$A = \sqrt[3]{\rho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta)} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right),$$

$$B = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right);$$

$$z_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta}{3}, \quad z_2 = -\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right),$$

$$z_3 = -\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right).$$

Las dos últimas raices pueden también escribirse

$$z_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta + 2\pi}{3}, \quad z_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta - 2\pi}{3}.$$

(Se continuará.)

MOVIMIENTO ARMÓNICO

(*Continuación.* Véase pág. 119.)

5. Estudiemos ahora la composición de dos movimientos armónicos sencillos, en la misma recta realizados. Basta para ello el método geométrico, con tal que los *periodos* de ambos sean iguales, aunque difieran mucho sus amplitudes y fases. Pues si suponemos, (figura 3), que PQ gire en torno de P en el mismo plano en que OP gire en torno de O, y que las velocidades de ambos movimientos sean iguales, el ángulo OPQ

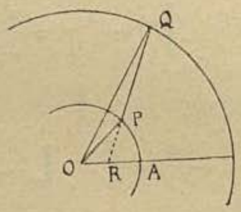


Fig. 3

subsistirá perdurable, y por tanto el triángulo OPQ permanecerá constante en forma y tamaño, al girar en torno de O. Luego alrededor de este punto describirá Q una circunferencia en el periodo dado, y los movimientos componentes de OP y PQ, según un diámetro OA, compondrán el movimiento componente de OQ según la misma recta. Así, pues, *dos movimientos armónicos sencillos, de igual periodo y en la misma recta, equivalen á otro movimiento armónico sencillo de igual periodo.* En cuanto á la amplitud OQ de este movimiento resultante, dependerá sólo de OP, de PQ y del ángulo OPQ, esto es, de las amplitudes de los dos movimientos armónicos componentes y del *suplemento del ángulo equivalente á la diferencia de sus fases.*

6. Cuando la diferencia de fases sea nula, ó un número completo de circunferencias, la amplitud resultante será la suma de las amplitudes de los movimientos componentes y poseerá entonces su máximo valor. Cuando la diferencia de fases sea un número impar de semicircunferencias, la amplitud del movimiento resultante será la diferencia de las amplitudes de los componentes.

Fácilmente se ve, prolongando QP hasta R, donde encuentra OA, que la fase QOA del movimiento armónico sencillo resultante tiene un valor intermedio entre los de las fases POA y QRA de los movimientos componentes. Excede á la una en el ángulo O del triángulo OPQ y es inferior á la otra en el ángulo Q del mismo; y como los senos de estos ángulos son entre sí como las amplitudes QP y PO, se infiere que cuando estas amplitudes no sean iguales, la fase del movimiento resultante poseerá valor más próximo al de la fase del movimiento componente de mayor amplitud.

Analíticamente el movimiento resultante estará expresado por la ecuación

$$x = a \cos(\omega t + \varepsilon) + a' \cos(\omega t + \varepsilon')$$

$$= (a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon') \cos \omega t - (a \operatorname{sen} \varepsilon + a' \operatorname{sen} \varepsilon') \operatorname{sen} \omega t,$$

ó bien

$$x = \mathrm{P} \cos(\omega t + \mathrm{Q}),$$

escribiendo

$$\mathrm{P} \cos \mathrm{Q} = a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon'$$

$$\mathrm{P} \operatorname{sen} \mathrm{Q} = a \operatorname{sen} \varepsilon + a' \operatorname{sen} \varepsilon'.$$

De estas dos ecuaciones se infiere que la amplitud del movimiento resultante será

$$\mathrm{P} = \sqrt{(a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon')^2 + (a \operatorname{sen} \varepsilon + a' \operatorname{sen} \varepsilon')^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2\, a\, a' \cos(\varepsilon - \varepsilon') + a'^2}$$

ó, con otras variantes de expresión,

$$\mathrm{P} = \sqrt{(a + a')^2 - 4\, a\, a' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon')}$$

$$= \sqrt{(a - a')^2 + 4\, a\, a' \cos^2 \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon')},$$

fórmulas de las cuales se deducen las conclusiones arriba citadas.

De aquellas mismas dos ecuaciones, dividida una por otra, se infiere que la época del movimiento resultante estará dada por la relación

$$\tan Q = \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon + a' \operatorname{sen} \varepsilon'}{a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon'},$$

cuyo valor se ve claramente que es intermedio entre los de $\tan \varepsilon$ y $\tan \varepsilon'$, cuando los ángulos ε y ε' son ambos positivos é inferiores á $\frac{1}{2}\pi$.

Si los períodos de los movimientos componentes no fueran iguales, bastaría un leve artificio para aplicar el mismo método de composición. Pues se tendría

$$x = a \cos(\omega t + \varepsilon) + a' \cos(\omega' t + \varepsilon')$$

$$= a \cos(\omega t + \varepsilon) + a' \cos\left(\omega t + \varepsilon' + (\omega' - \omega) t\right),$$

por donde se ve que los antedichos valores de P y Q aun cumplirían las condiciones expresadas si en vez de ε' se escribiera $\varepsilon' + (\omega' - \omega) t$. Luego podrían considerarse los dos movimientos componentes como si fuesen de igual período, con tal que la época de uno de ellos aumentara constantemente con una velocidad angular igual á la diferencia de las velocidades angulares en las circunferencias de los dos movimientos componentes. El triángulo OPQ no conservaría entonces invariable su forma, sino que pasaría de un modo gradual ó continuo por todas las que cabe darle variando las diferencias de fase de los movimientos armónicos componentes. Es claro que el período en que volvería á su primitivo valor sería $\frac{2\pi}{\omega' - \omega}$ y por consiguiente tanto mayor cuanto menos discreparan los períodos de los movimientos componentes.

7. Ofrecen las mareas uno de los mejores ejemplos de los principios establecidos. Si fueran producidas solamente por el sol ó por la luna, el nivel del mar, dos veces por día, solar ó lunar, tendría en cualquier punto dado una alza y otras dos veces una baja, con movimiento próximamente armónico sencillo, cuya fase dependería tan sólo de la distancia á que el cuerpo productor de la marea se hallara del meridiano supe-

rior ó inferior. Pero el efecto del sol se une al de la luna, y la marea es el movimiento resultante de los que se producirían por separado. Por esto, cuando ambos cuerpos están en conjunción ó en oposición, es decir, en la luna nueva y en la llena, el creciente total de la marea es la suma de los crecientes de la marea lunar y de la solar; y así se forma la marea máxima ó marea de las zizigias. Mas cuando la luna está en cuadratura, el creciente de la marea es el exceso de la marea lunar sobre la solar, pues es bajamar por efecto del sol, cuando es pleamar por efecto de la luna. En las posiciones intermedias el efecto queda comprendido entre esos límites, pero el creciente de la marea debida á las dos causas se acerca más á la cumbre de la marea lunar que á la cumbre de la marea solar. El creciente de la marea, en el primer cuarto de la luna y en el tercero, es *anterior* á la pleamar debida sólo á la luna, mientras que en el segundo y último cuarto es *posterior*. Así se produce lo que se llama *adelanto* ó *retraso* de las mareas, y como se ve es esto una consecuencia de la construcción arriba señalada. Si la marea lunar y la solar fueran de igual amplitud, las mareas de las zizigias alcanzarían doble altura que cada una de aquellas por separado, y no habría marea en el momento de la marea de la cuadratura.

Hémonos detenido en el examen de este caso especial á fin de que se entienda mejor el método general que describíamos para combinar movimientos armónicos sencillos cuyos períodos difieren poco.

8. Lo dicho de las ondas de las mareas es aplicable á todas las ondas en las cuales las agitaciones ó disturbios particulares debidos á cada causa son tan pequeños que el efecto de todas ellas reunidas equivale al producido superponiendo los efectos separados. Así, cuando en un paraje del mar se encuentran dos series de ondas de igual longitud, el movimiento resultante es también una serie de ondas de la misma longitud, cuyas alturas y fases dependen de las alturas y fases de los movimientos componentes. Cuando una cumbre se encuentra con otra cumbre, la amplitud de la onda resultante es la suma de las amplitudes de las ondas componentes; y cuando una cumbre se encuentra con un valle, aquella am-

plitud es la diferencia de las otras, de suerte que en este último caso quedará en ese momento el agua en sosiego, si las amplitudes componentes son iguales. Como consecuencia de *mares cruzados* se explica que durante una tempestad una porción del mar esté casi tranquila por breve tiempo, y se encrespe de pronto con grande violencia.

9. Si en vez de estudiar el avance sucesivo de una parte de la sección de la superficie ondeada, examinamos la figura instantánea de toda la sección, nos explicaremos un fenómeno sorprendente que muy á menudo acontece en las costas en declive. Nótase en ellas muchas veces que cada novena ó décima onda, ó cosa así, alcanza mayor altura que las ondas inmediatas que preceden ó siguen. Proviene esto de la superposición de dos ó más series de ondas tales que la distancia de cumbre á cumbre en cada serie es distinta que en las otras series, por lo cual, de la combinación de ellas resultan, si se representan gráficamente como se indicó en el párrafo 4, fenómenos parecidos á los de las mareas de las zizigias y cuadraturas, y al retraso y adelanto de las diversas mareas.

Muéstrase en la figura 4 parte de lo que acaece cuando las amplitudes de las ondas de dos series son iguales y las longitudes de las mismas ondas están en la razón de 15 á 17. No dista mucho de este resultado el que se tiene cuando las longitudes están en la razón de 7 á 8 ó de 8 á 9.

Fig. 4

10. Cuando en una misma recta se realizan, con iguales períodos, más de dos movimientos armónicos sencillos, es claro que el resultante de dos de ellos se compone con otro; y así prosiguiendo, el movimiento resultante final es también un movimiento armónico sencillo de igual período.

Dedúcese esto mismo por cálculo, pues será

$$x = \Sigma\, a \cos(\omega\, t + \varepsilon) = \cos \omega\, t . \Sigma\, (a \cos \varepsilon) - \operatorname{sen} \omega\, t . \Sigma\, (a \operatorname{sen} \varepsilon),$$

ó bien

$$x = \mathrm{P} \cos(\omega\, t + \mathrm{Q}),$$

determinando P y Q por las relaciones

$$P \cos Q = \Sigma (a \cos \varepsilon), \qquad P \operatorname{sen} Q = \Sigma (a \operatorname{sen} \varepsilon).$$

Si los períodos de los movimientos componentes no fueran iguales, ni aun *próximamente* iguales, el análisis matemático no daría resultados sencillos sino en casos especiales. Pero no hay que preocuparse mucho por ello, pues pueden aplicarse métodos gráficos que en la mayoría de los problemas prácticos ofrecen suficiente exactitud.

11. Tratemos ahora de la composición de movimientos armónicos sencillos realizados en rectas perpendiculares, concretándonos al caso en que sus períodos sean iguales. Como en tal supuesto, en cada uno de los movimientos componentes en las dos rectas indicadas, la aceleración estará con el desvío en *igual relación*, el movimiento resultante, en virtud del teorema general sentado en el párrafo primero, será elíptico, y en él se describirán áreas iguales en torno del centro.

Para estudiar el problema, supongamos por de pronto que las amplitudes sean también iguales. Representadas por OA y OB, (figura 5), las dos rectas perpendiculares en que los mo-

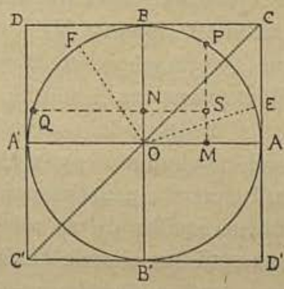


Fig. 5

vimientos componentes acontecen, describamos, haciendo centro en O, una circunferencia de radio igual á la común amplitud. Suponiendo ambos movimientos realizados en sentido positivo, es decir, en sentido contrario al del movimiento de las saetas de un reloj [1], si AOE y BOF son las épocas res-

(1) Este sentido positivo de la rotación es el mismo en que un observador colocado encima del polo, vería girar la tierra en torno de su eje.

pectivas de esos dos, es claro que EOF excederá en un ángulo recto la diferencia entre las fases de dichos movimientos componentes según OB y OA. Además, si P y Q representan las posiciones correlativas en la circunferencia común al cabo del tiempo t, será el arco FQ = arco EP; y si se traza PM perpendicular á OA, y QN perpendicular á OB, el punto de intersección S será la posición correspondiente en el movimiento resultante, al cabo de ese tiempo t. Por lo demostrado anteriormente, el lugar geométrico de S será una elipse inscripta en el cuadrado CDC'D'.

Cuando el ángulo EOF sea recto, es decir, cuando las fases sean iguales, la elipse se convertirá en la diagonal CC' del cuadrado antedicho, tangente á la circunferencia, en los extremos de los diámetros AA' y BB'. Cuando EOF valga tres ángulos rectos, la elipse se convertirá en la otra diagonal DD'. Y cuando EOF valga dos rectos ó cuatro, es decir, cuando el movimiento componente según OB esté adelantado, respecto del realizado según OA, en una cuarta parte ó en tres cuartas partes del período común, la elipse se convertirá en la circunferencia ABA'B'. En cuanto al sentido en que el movimiento resultante se produce, basta reparar cómo gira OS. Mientras P está cerca de A, la recta MS casi coincide con la AC, y en tanto que Q permanece en la semicircunferencia BA'B', el punto N se mueve en el sentido BB' y el ángulo AOS *mengua*. Luego, si la época del movimiento según OB no llega á exceder la del movimiento según OA en dos ángulos rectos, la elipse será descrita negativamente, esto es, en el mismo sentido de las manecillas de un reloj. Y por un razonamiento parecido se verá que cuando dicho exceso esté comprendido entre dos y cuatro ángulos rectos, será la elipse descrita positivamente.

Si las amplitudes no fueran iguales, bastaría ensanchar ó estrechar la figura CDC'D', la cual, en vez de ser un cuadrado, sería un rectángulo, donde quedarían inscriptas las órbitas, todas las cuales, á excepción de las diagonales, serían elipses. En todo lo demás puede repetirse lo antedicho.

Hállanse por cálculo las mismas propiedades. Pues tomando OA y OB por ejes de las x é y, los dos movimientos armónicos sencillos de igual período realizados en esas direcciones darán

$$x = a \cos(\omega t + \varepsilon), \qquad\qquad y = a' \cos(\omega t + \varepsilon'),$$

y eliminando t entre ambas ecuaciones, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{aa'} \cos(\varepsilon' - \varepsilon) + \frac{y^2}{a'^2} = \operatorname{sen}^2(\varepsilon' - \varepsilon),$$

que es la ecuación de una elipse.

Conviértese esta figura en una circunferencia solamente cuando se cumplen estas condiciones:

$$a = a', \qquad\qquad \cos(\varepsilon' - \varepsilon) = 0,$$

esto es, cuando las amplitudes son iguales y las fases difieren en un número impar de ángulos rectos. Conviértese en la recta

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a'} = 0, \qquad \text{cuando} \qquad \varepsilon' - \varepsilon = 0,$$

y en la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a'} = 0, \qquad \text{cuando} \qquad \varepsilon' - \varepsilon = \pi.$$

Llamando θ el ángulo SOA, se tiene

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{a' \cos(\omega t + \varepsilon')}{a \cos(\omega t + \varepsilon)}$$

ó con otra forma

$$\tan\theta = \frac{a'}{a}\left\{\cos(\varepsilon' - \varepsilon) - \operatorname{sen}(\varepsilon' - \varepsilon)\tan(\omega t + \varepsilon)\right\}$$

Mas de aquí se infiere, derivando con relación á t é indicando por $\dot{\theta}$ la derivada de θ,

$$\sec^2\theta \,.\, \dot{\theta} = -\frac{a'}{a}\,\omega \operatorname{sen}(\varepsilon' - \varepsilon)\sec^2(\omega t + \varepsilon);$$

por donde se ve, atendiendo al signo negativo que precede al segundo miembro, que la rotación en la elipse se realiza de izquierda á derecha por arriba, cuando $\varepsilon' - \varepsilon$ está comprendida entre 0 y π; y de derecha á izquierda por arriba, cuando esa diferencia está entre π y 2π.

(Se concluirá.)

CURIOSIDADES

Numeración egipcia. Extendían los antiguos egipcios su escritura geroglífica á la expresión de números por medio de signos representativos de las unidades de los diversos órdenes. Indicaban la unidad simple con una *raya vertical*, la decena con un arco casi cerrado que formaba una *circunferencia entreabierta*, la centena con el dibujo de una *hoja de palmera, arrollada*, el millar con el dibujo de una *flor de loto*, y la decena de millar con un dibujo que representaba un *dedo doblado*. El número compuesto de varias unidades de diversos órdenes, lo indicaban repitiendo cada signo respectivo tantas veces como unidades de las representadas por él había en dicho número. Era este sistema de una sencillez primitiva y es natural que precediera á los demás. Con él, como advierte Humboldt, no se leían las unidades sino que se contaban.

Mas este sistema de repetición de unidades, que imitaron los romanos, simplificándolo con la adopción de signos para colecciones intermedias de unidades, como cinco, cincuenta y quinientos, si no ofrecía grande inconveniente en las inscripciones, no podía servir para cálculos rápidos, pues para ello se requieren signos que representen los nueve primeros números, aparte de los que indiquen las unidades de diversos órdenes. Ofrecen una especie de transición de uno á otro sistema los signos empleados en el tipo de escritura llamado *pahlavi* ó *pehlevi*, que usaron los persas, y que por sus caracteres es parecido al modo de escribir de los sirios. Indicaban los persas los cuatro primeros números con cuatro signos que eran cada uno un rasgo curvo, ondeado en la parte superior con tantas puntas como unidades representaba; y los otros cinco números, de cinco á nueve, los indicaban combinando los anteriores, de este modo, poniendo por 5, 6, 7, 8 y 9 estos grupos: $2+3$, $3+3$, $3+4$, $4+4$, $3+3+3$.

Numeración hebrea. En vez de repetir los signos representativos de las unidades de diferentes órdenes para indicar las que de cada orden contenía el número que había de expresarse, otros pueblos daban á las letras de su alfabeto valor numérico que dependía del lugar que en dicho alfabeto ocupaban. Esto hacían los hebreos y lo mismo practicaban los fenicios, cuya lengua está comprendida en la llamada rama hebrea de las lenguas semíticas. Compónese el alfabeto hebreo de veintidos letras, todas consonantes, porque la escritura hebrea, en un principio, fué silábica como la de los fenicios; pero cinco de esas letras poseen en fin de dicción figura algo distinta de la que les corresponde al principio ó en medio. Hay, pues, veintisiete signos diferentes. De éstos los de las nueve primeras letras designaban unidades simples; los de las nueve letras siguientes señalaban decenas; y para expresar centenas, empleábanse los signos de las cuatro últimas letras y las figuras finales de las cinco letras que las admitían. En el siguiente cuadro van los signos respectivos con sus nombres alfabéticos, el sonido equivalente en castellano y el valor numérico que les correspondía (1).

א	Alef	h	1
ב	Bet	b, v	2
ג	Guímel	g	3
ד	Dálet	d	4
ה	He	h	5
ו	Vau	v	6
ז	Záyin	z	7
ח	Jet	j	8
ט	Tet	t	9
י	Yod	y	10
כ	Kaf	k	20
ל	Lámed	l	30
מ	Mem	m	40

(1) En la ortografía de los nombres de las letras y en la equivalencia de sonidos, síguese aquí la *Gramática hebrea por un sacerdote de las Escuelas Pías*, Madrid, 1886, indicando por *h* subrayada la *h* suavemente aspirada; por *h* doblemente subrayada la aspiración fortísima; por s la z alemana equivalente á *ts* ó *ds*; por s la *sh* inglesa ó *ch* francesa; y por t la *th* inglesa ó θ griega.

נ	Nun	n	50
ס	Sámek	s	60
ע	Háyin	h	70
פ	Pe	p, f	80
צ	Tsáde	s	90
ק	Qof	k, q	100
ר	Res	r	200
שׂ	Sin	s, s	300
ת	Tau	t, t	400
ך	Kaf final	k	500
ם	Mem final	m	600
ן	Nun final	n	700
ף	Pe final	p, f	800
ץ	Tsáde final	s	900

Los millares, decenas de millar y centenas de millar se indicaban con los mismos caracteres que las unidades, decenas y centenas simples, poniendo encima dos puntos ó dos rayitas.

Cuando un número requería varias letras, se empezaba por las de unidades superiores, de derecha á izquierda, que, como es sabido, es también el modo de escribir y leer en hebreo las palabras. Pero el número 15 se componía con los signos del 9 y del 6, y no con los del 10 y del 5, para no emplear la reunión de las letras *yod* y *he* sino para nombrar á Dios.

El sistema de numeración expuesto es el llamado *masorético;* mas hay otro que se dice *rabínico* y que sólo difiere en la manera de expresar las centenas, cuando pasan de cuatro, no por medio de figuras finales, sino agregando al signo de 400 las letras de otras centenas, hasta completar las que se quieren, descomponiendo, por ejemplo, 500 en 400 + 100 y 900 en 400 + 400 + 100.

Numeración china. Preséntase en la historia otro sistema de numeración no basado como el egipcio en la repetición de las unidades de los diversos órdenes, ni como el que siguieron hebreos y fenicios, fundado en el valor numérico atribuído á las letras del alfabeto. Hállase este tercer sistema en la China, en el Japón y en esa parte de la India meridional—que se extiende por la costa de Coromandel desde algunas millas al norte de la ciudad de Madrás hasta el cabo Comorín, comprendiendo también la porción septentrional de la isla de Ceilán—donde se habla el *tamul*, ó *tamil* como escriben los ingleses, lengua no derivada del sanscrito y reputada por madre de las indígenas que los filólogos modernos dicen dravirianas ó dravidianas.

Este sistema, que puede llamarse *de coeficientes*, adopta dos clases de signos: unos para los términos de la progresión décupla, á partir de 1, y otros para los nueve primeros números que sirven de coeficientes, los cuales escriben los chinos y japoneses encima ó debajo de los otros, mientras que el pueblo tamul los escribe á la izquierda. Por ejemplo, si los signos de la primera clase fueran las cifras romanas correspondientes y los signos de la segunda nuestras cifras usuales, los chinos y japoneses escribirían el número 3852 del primero de los dos modos siguientes y los tamules del segundo:

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 5 & 2 \\ \text{M}, & \text{C}, & \text{X}, & \text{I} \end{matrix} \qquad 3\,\text{M}, 8\,\text{C}, 5\,\text{X}, 2\,\text{I};$$

por donde se ve que el sistema de coeficientes es fiel traducción de la numeración hablada, pues enunciado el antedicho número equivale á decir *tres* veces *mil*, mas *ocho* veces *ciento*, mas *cinco* veces *diez*, mas *dos* veces *uno*, ó bien, valiéndose de los signos usuales de adición y multiplicación:

$$\textit{tres} \times \textit{mil} + \textit{ocho} \times \textit{ciento} + \textit{cinco} \times \textit{diez} + \textit{dos} \times \textit{uno}.$$

Aproxímase mucho este sistema de numeración al otro sistema llamado arábigo, pues es claro que en el precedente ejemplo se pueden sobreentender los signos M, C, X, I y escribir sólo los coeficientes 3, 8, 5 y 2, indicando cada uno con su situación respectiva el término de la progresión décupla que multiplica. No había, pues, de uno á otro sistema más que un paso; pero este paso había que darlo, y lo que parece sencillo después, no lo es antes.

SOLUCIONES DE CUESTIONES PROPUESTAS

CUESTIÓN 12

Tres trozos de hielo son tales, que el volumen del primero excede en $\frac{1}{8}$ al del segundo; éste es los $\frac{16}{27}$ del volumen del tercero; y la diferencia de los del primero y tercero es de 1,005093 m^3. —¿Cuántos litros de agua dará la fusión de los tres trozos, sabiendo que el agua aumenta $\frac{1}{9}$ de su volumen al pasar del estado líquido al sólido?

SOLUCIÓN

Sean x, y, z los volúmenes de los tres trozos de hielo, primero, segundo y tercero. Según el enunciado del problema, será

$$x = \left(1 + \frac{1}{8}\right) y, \qquad y = \frac{16}{27} z, \qquad z - x = 1{\cdot}005093;$$

de donde se infiere

$$y = \frac{8}{9} x, \qquad z = \frac{3}{2} x, \qquad \frac{1}{2} x = 1{\cdot}005093;$$

luego

$$\begin{aligned} x &= 2{\cdot}010186 \\ y &= 1{\cdot}786832 \\ z &= 3{\cdot}015279 \\ \hline x + y + z &= 6{\cdot}812297 \end{aligned}$$

Averiguado ésto, si v es el volumen del agua procedente de la fusión de los tres trozos de hielo, se tendrá

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right) v = 6{\cdot}812297;$$

y por lo tanto,

$$v = 6{\cdot}1310673 \ m^3 = 6131{\cdot}0673 \ l.$$

José LLUCH MELÉNDEZ,
Alumno de la Facultad de Ciencias de Valencia.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.