ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 2 FEBRERO 1896

SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó.—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansión.—Distancias focales de espejos y lentes, por Edwin H. Barton.—Trazado de la Hipérbola, por George J. Burch.—Cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

POR

D. Luis G. Gascó

Las fórmulas de Trigonometría son numerosísimas y en su mayor parte tan fáciles de deducir como difíciles de conservar en la memoria. Natural es, por tanto, que se hayan excogitado medios para recordar con poco trabajo las de uso más frecuente.

Entre estos medios, las reglas llamadas de Neper para obtener las fórmulas correspondientes al triángulo esférico rectángulo, con las modificaciones más ó menos acertadas que de ellas se han hecho, son las que han tenido mayor aceptación y cuyo empleo está aún bastante generalizado. Pero unas y otras, á más de fundarse en dos relaciones artificiosas cuya recordación es indispensable, conducen de un modo indirecto al objeto que se proponen, toda vez que exigen formar una ecuación en la cual intervienen complementos de algunos de los elementos triangulares, transformar después esta relación para que dependa directamente de los elementos del trián-

2

gulo y, en la mayoría de los casos, despejar luego el elemento cuya determinación se intenta.

Después de haber ensayado nosotros diversos procedimientos para obviar los inconvenientes indicados, nos atrevemos á proponer un medio que permite obtener inmediatamente la fórmula final, ó sea la expresión del elemento que se quiere determinar en función inmediata de los datos.

Y como nuestro procedimiento, con ligeras variantes, es aplicable no sólo á las determinaciones del triángulo esférico, sino también á las del rectilíneo, prestándose igualmente á la obtención de relaciones goniométricas, y llegando su alcance hasta las fórmulas-definiciones de los números trigonométricos, comenzaremos dando á conocer su uso en los casos de mayor sencillez, extendiéndolo sucesivamente á los de más complicación.

Últimamente, y por vía de apéndice, reproduciremos las antiguas Analogías del Barón de Marchiston, y algunas otras reglas prácticas notables por algún concepto.

I

Fórmulas-Definiciones

Pudiendo considerarse los números trigonométricos bajo diversos puntos de vista, no nos parece fuera de propósito establecer ante todo las definiciones fundamentales de los mismos en forma sencilla y elemental.

Si desde un punto cualquiera de uno de los lados de un ángulo oblicuo se traza una perpendicular al otro lado, ó á su prolongación á través del vértice, resultan tres magnitudes lineales limitadas, á saber: La *perpendicular*, la *distancia* del punto elegido al vértice del ángulo, y la *proyección* de esta distancia sobre el otro lado. De la comparación de estas tres longitudes se originan los llamados *números trigonométricos*, que son el seno, la tangente, la secante, el coseno, la cotangente y la cosecante.

Seno de un ángulo es la relación entre la perpendicular y la distancia.

Tangente de un ángulo es la relación entre la perpendicular y la proyección.

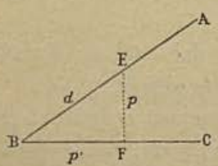
Secante de un ángulo es la relación entre la distancia y la proyección.

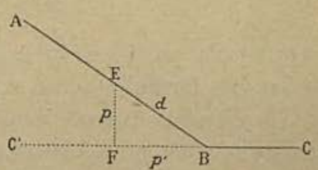
Coseno de un ángulo es la relación entre la proyección y la distancia.

Cotangente de un ángulo es la relación entre la proyección y la perpendicular.

Cosecante de un ángulo es la relación entre la distancia y la perpendicular (1).

Así, siendo ABC el ángulo, $EF = p$ la perpendicular,





$EB = d$ la distancia, y $BF = p'$ la proyección, será

$$sn\ B = \frac{p}{d} \qquad csn\ B = \frac{p'}{d}$$

$$tg\ B = \frac{p}{p'} \qquad ctg\ B = \frac{p'}{p}$$

$$sc\ B = \frac{d}{p'} \qquad csc\ B = \frac{d}{p}$$

---

(1) Considerada la perpendicular como *ordenada* ortogonal del punto elegido en un lado del ángulo, respecto al otro lado tomado como eje de las x, la proyección como su *abscisa*, y la distancia como *radio* del arco correspondiente, resulta que

Seno de un ángulo es la relación entre la ordenada y el radio.

Tangente de un ángulo es la relación entre la ordenada y la abscisa.

Secante de un ángulo es la relación entre el radio y la abscisa.

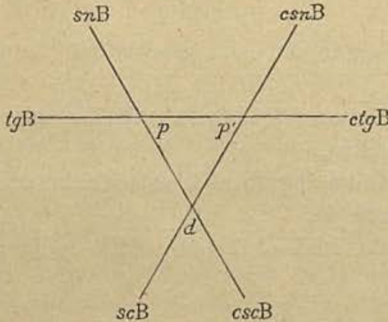
Coseno de un ángulo es la relación entre la abscisa y el radio.

Cotangente de un ángulo es la relación entre la abscisa y la ordenada.

Cosecante de un ángulo es la relación entre el radio y la ordenada.

Para recordar estas fórmulas-definiciones (1) proponemos el

Diagrama 1.º



cuya ley de construcción es evidente, y del cual se derivan dichas seis fórmulas por la regla única que sigue:

Un elemento extremo cualquiera del diagrama es igual al cociente de los dos que le son consecutivos en su recta.

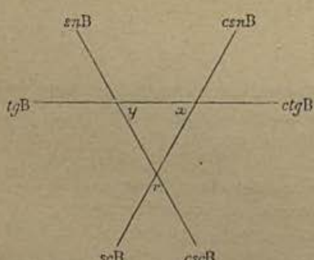
Aplicando esta regla obtendremos

1) $sn\ \mathrm{B} = \dfrac{p}{d}$ 2) $tg\ \mathrm{B} = \dfrac{p}{p'}$ 3) $sc\ \mathrm{B} = \dfrac{d}{p'}$

4) $csn\ \mathrm{B} = \dfrac{p'}{d}$ 5) $ctg\ \mathrm{B} = \dfrac{p'}{p}$ 6) $csc\ \mathrm{B} = \dfrac{d}{p}$

---

(1) Para los que prefieran referir las definiciones de los números trigonométricos á las coordenadas ortogonales de un punto, puede servir el siguiente diagrama, del cual se deducen las fórmulas-definiciones adjuntas:



$sn\ \mathrm{B} = \dfrac{y}{r}$ $csn\ \mathrm{B} = \dfrac{x}{r}$

$tg\ \mathrm{B} = \dfrac{y}{x}$ $ctg\ \mathrm{B} = \dfrac{x}{y}$

$sc\ \mathrm{B} = \dfrac{r}{x}$ $csc\ \mathrm{B} = \dfrac{r}{y}$

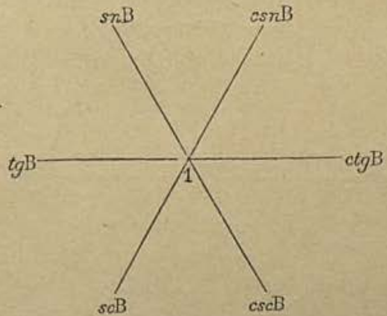
en las que y, x, r designan respectivamente ordenada, abscisa y radio.

II

Relaciones goniométricas de reciprocidad

Para recordar las fórmulas de reciprocidad, ó sea las que, en forma monomia, relacionan dos á dos los números trigonométricos del mismo ángulo, proponemos el

Diagrama 2.º



que resulta reuniendo en un solo punto, marcado con el número 1, los tres vértices del diagrama 1.º De él se derivan dichas fórmulas de reciprocidad por las dos reglas siguientes:

Un elemento extremo cualquiera del diagrama es igual al cociente de los dos que le son consecutivos en su recta.

El producto de los dos elementos extremos de una misma recta es igual al elemento medio.

Aplicando estas reglas obtendremos

7) $sn\ \mathrm{B} = \dfrac{1}{csc\ \mathrm{B}}$ 10) $csn\ \mathrm{B} = \dfrac{1}{sc\ \mathrm{B}}$ 13) $sn\ \mathrm{B} . csc\ \mathrm{B} = 1$

8) $tg\ \mathrm{B} = \dfrac{1}{ctg\ \mathrm{B}}$ 11) $ctg\ \mathrm{B} = \dfrac{1}{tg\ \mathrm{B}}$ 14) $tg\ \mathrm{B} . ctg\ \mathrm{B} = 1$

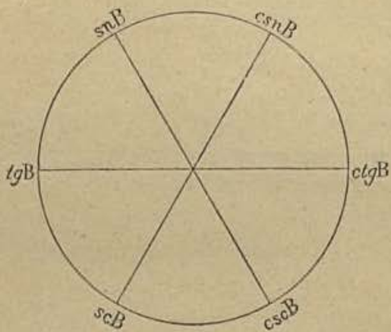
9) $sc\ \mathrm{B} = \dfrac{1}{csn\ \mathrm{B}}$ 12) $csc\ \mathrm{B} = \dfrac{1}{sn\ \mathrm{B}}$ 15) $sc\ \mathrm{B} . csn\ \mathrm{B} = 1$

III

Relaciones goniométricas monomias

Para recordar las fórmulas goniométricas monomias, ó sea las que expresan cada número trigonométrico en función de otros dos correspondientes al mismo ángulo, proponemos el

Diagrama 3.°



que resulta circunscribiendo una circunferencia al diagrama 2.° De él se derivan dichas fórmulas monomias por las dos reglas siguientes:

Un elemento cualquiera del diagrama es igual al cociente de los dos circularmente consecutivos á él.

Un elemento cualquiera es igual al producto de los dos que le son circularmente contiguos.

Aplicando estas reglas obtendremos

16) $snB = \dfrac{csn\,B}{ctg\,B}$ 17) $snB = \dfrac{tgB}{sc\,B}$ 18) $snB = tgB.csnB$

19) $tgB = \dfrac{snB}{csn\,B}$ 20) $tgB = \dfrac{sc\,B}{csc\,B}$ 21) $tgB = snB.scB$

22) $scB = \dfrac{tgB}{snB}$ 23) $scB = \dfrac{csc\,B}{ctgB}$ 24) $scB = tgB.cscB$

25) $csn\text{B} = \dfrac{ctg\text{B}}{csc\text{B}}$ 26) $csn\text{B} = \dfrac{sn\text{B}}{tg\text{B}}$ 27) $csn\text{B} = sn\text{B}.ctg\text{B}$

28) $ctg\text{B} = \dfrac{csn\text{B}}{sn\text{B}}$ 29) $ctg\text{B} = \dfrac{csc\text{B}}{sc\text{B}}$ 30) $ctg\text{B} = csn\text{B}.csc\text{B}$

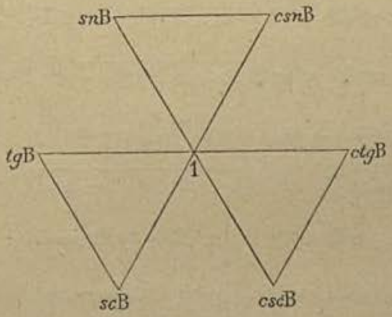
31) $csc\text{B} = \dfrac{sc\text{B}}{tg\text{B}}$ 32) $csc\text{B} = \dfrac{ctg\text{B}}{csn\text{B}}$ 33) $csc\text{B} = sc\ \text{B}.ctg\text{B}$

IV

Relaciones goniométricas binomias

Para recordar las fórmulas goniométricas binomias, ó sea las que relacionan dos á dos, en forma binomia, los números trigonométricos de un mismo ángulo, proponemos el

Diagrama 4.°



que resulta uniendo por medio de rectas los extremos *sn*B y *csn*B, *tg*B y *sc*B, *ctg*B y *csc*B del diagrama 2.° De él se derivan dichas fórmulas binomias por las siguientes reglas:

La suma de los cuadrados de los elementos extremos superiores de cada triángulo es igual al cuadrado del elemento inferior.

El cuadrado de uno de los elementos superiores de cada triángulo es igual á la diferencia de cuadrados del elemento inferior y del superior adyacente al primero.

Aplicando estas reglas obtendremos

34) $sn^2\,\text{B} + cns^2\,\text{B} = 1$

35) $sn^2\,\text{B} = 1 - csn^2\,\text{B}$ 36) $sn\ \text{B} = \sqrt{1 - csn^2\,\text{B}}$

37) $csn^2\,\text{B} = 1 - sn^2\,\text{B}$ 38) $csn\ \text{B} = \sqrt{1 - sn^2\,\text{B}}$

39) $tg^2\,B + 1 = sc^2\,B$ 40) $sc^2\,B - tg^2\,B = 1$

41) $sc^2\,B = tg^2\,B + 1$ 42) $sc\,B = \sqrt{tg^2\,B + 1}$

43) $tg^2\,B = sc^2\,B - 1$ 44) $tg\,B = \sqrt{sc^2\,B - 1}$

45) $1 + ctg^2\,B = csc^2\,B$ 46) $csc^2\,B - ctg^2\,B = 1$

47) $csc^2\,B = ctg^2\,B + 1$ 48) $csc\,B = \sqrt{ctg^2\,B + 1}$

49) $ctg^2\,B = csc^2\,B - 1$ 50) $ctg\,B = \sqrt{csc^2\,B - 1}$

Las fórmulas sumatorias 35, 36, 37, 38, 40, 43, 44, 46, 49 y 50, pueden ponerse en forma factorial como sigue:

51) $sn^2\,B = (1 + csn\,B)\,(1 - csn\,B)$

52) $sn\,B = \sqrt{(1 + csn\,B)\,(1 - csn\,B)}$

53) $csn^2\,B = (1 + sn\,B)\,(1 - sn\,B)$

54) $csn\,B = \sqrt{(1 + sn\,B)\,(1 - sn\,B)}$

55) $(sc\,B + tg\,B)\,(sc\,B - tg\,B) = 1$

56) $tg^2\,B = (sc\,B + 1)\,(sc\,B - 1)$

57) $tg\,B = \sqrt{(sc\,B + 1)\,(sc\,B - 1)}$

58) $(csc\,B + ctg\,B)\,(csc\,B - ctg\,B) = 1$

59) $ctg^2\,B = (csc\,B + 1)\,(csc\,B - 1)$

60) $ctg\,B = \sqrt{(csc\,B + 1)\,(csc\,B - 1)}$

(Se continuará).

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

por P. Mansión

CATEDRÁTICO NUMERARIO DE LA UNIVERSIDAD DE GANTE

VERSIÓN ESPAÑOLA POR D. LUIS G. GASCÓ

con adiciones y mejoras comunicadas por el autor

El número $e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 459045.....$ es, con π, relación de la circunferencia al diámetro, el número inconmensurable que ocurre con más frecuencia en el Análisis y en la Geometría. Puede definirse por cualquiera de las igualdades:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \text{etc.};$$

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \qquad m = \infty;$$

$$\text{Lim} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1, \qquad \alpha = 0.$$

El P. V. de Riccati, S. J. (1707-1775) ha formado, mediante el número e, ciertas expresiones, llamadas *funciones hiperbólicas*, que gozan de propiedades semejantes á las que tienen las *funciones circulares* seno, coseno, tangente, etc., *pero más fáciles* de establecer. Varios geómetras de los siglos XVIII y XIX (entre otros Moivre, de Foncenex, Lambert, Euler, Gudermann, Grassmann, Lamé, Forti, Gronau, Hoüel, Laisant, Günther), que emplearon consciente ó inconscientemente las funciones hiperbólicas, han hecho resaltar la utilidad de las notaciones de Riccati.

La semejanza de propiedades entre las funciones hiperbólicas y las funciones circulares se puede *explicar* partiendo de la analogía que existe entre el círculo y la hipérbola equilátera, ó bien comparando los desarrollos en serie de estas dos especies de funciones.

Pero la exposición de las propiedades de las funciones hiperbólicas en nada depende de esta explicación y puede hacerse, por medio del álgebra elemental, sin recurrir ni á la hipérbola equilátera ni á las series.

Esto es lo que hacemos patente en el presente opúsculo, en el cual exponemos sumariamente los principios fundamentales de la teoría de estas funciones.

Nuestro trabajo debe considerarse como una introducción á las obras intituladas: 1. *Die Lehre von den gewoehnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen theilweise auf Grund freier Bearbeitung von* Laisant's «Essai sur les fonctions hyperboliques» *und* Forti's «Tavole logaritmiche» *dargestellt von* Dr. SIEGM. GÜNTHER, Professor am Gymnasium zu Ansbach, etc. (Halle a/S, Nebert, 1881. Un volumen en 8.° de X-440 páginas). 2. *Theorie der Potenzial-oder cyclisch-hyperbolischen Functionen* von Dr. C. GUDERMANN, Professor der Mathematik an der Akademie zu Munster. Mit einer Kupfertafel (Berlin, 1833, G. Reimer. Un volumen en 4.° de X-354 páginas de las cuales 196 son Tablas).

La utilidad práctica de las funciones hiperbólicas, claramente resalta del párrafo siguiente sacado de un artículo de Yvon Villarceau: «Ocurre con frecuencia, en los cálculos de resistencia de materiales, que los resultados aparecen complicados de imaginarias á consecuencia de circunstancias especiales. Para obtenerlos bajo forma real se vuelve á empezar un cálculo más ó menos largo, siendo así que existen transformaciones sencillas que conducen rápidamente al objeto deseado. En muchos casos estas transformaciones se efectúan cómodamente por medio de las funciones hiperbólicas.» (*Annales des Ponts et Chaussées*, 6.ª serie, t. I, págs. 207-215, Febrero 1881).

Ojalá contribuya este corto trabajo á dar á conocer más el precioso instrumento analítico inventado por Riccati hace más de un siglo, y tan poco empleado todavía (1).

(1) En la Universidad de Gante proponemos anualmente *como ejercicio* á los alumnos de la Escuela de Ingenieros Civiles la demostración de las propiedades establecidas § I. Al cabo de una semana las funciones hiperbólicas les son tan familiares como las funciones circulares.

I. Propiedades fundamentales

1. *Definiciones.* Las expresiones

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),\quad \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),\quad \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},\quad \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}},\quad \frac{2}{e^t + e^{-t}},\quad \frac{2}{e^t - e^{-t}}$$

se representan por los símbolos

$$\operatorname{Sh} t,\quad \operatorname{Ch} t,\quad \operatorname{Th} t,\quad \operatorname{Coth} t,\quad \operatorname{Sech} t,\quad \operatorname{Cosech} t,$$

y se llaman *seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante hiperbólicos.*

Obsérvese que $\operatorname{Ch} t$, $\operatorname{Sech} t$ son siempre positivos.

2. *Propiedades inmediatas de estas funciones.* Se tiene evidentemente

$$e^t = \operatorname{Ch} t + \operatorname{Sh} t,\qquad e^{-t} = \operatorname{Ch} t - \operatorname{Sh} t,$$

$$\operatorname{Th} t = \frac{\operatorname{Sh} t}{\operatorname{Ch} t},\qquad \operatorname{Coth} t = \frac{\operatorname{Ch} t}{\operatorname{Sh} t},$$

$$\operatorname{Sech} t = \frac{1}{\operatorname{Ch} t},\quad \operatorname{Cosech} t = \frac{1}{\operatorname{Sh} t},\quad \operatorname{Coth} t = \frac{1}{\operatorname{Th} t}. \qquad (i)$$

Las tres últimas relaciones permiten, en general, en las funciones hiperbólicas limitarse á estudiar las funciones $\operatorname{Ch} t$, $\operatorname{Sh} t$, $\operatorname{Th} t$.

Asimismo se tiene

$$\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t = (\operatorname{Ch} t + \operatorname{Sh} t)(\operatorname{Ch} t - \operatorname{Sh} t) = e^t \times e^{-t} = 1.$$

Dividiendo esta igualdad por $\operatorname{Ch}^2 t$, ó por $\operatorname{Sh}^2 t$, se deducen las relaciones

$$1 = \operatorname{Th}^2 t + \operatorname{Sech}^2 t,\quad 1 = \operatorname{Coth}^2 t - \operatorname{Cosech}^2 t.$$

La primera puede escribirse

$$\operatorname{Ch}^2 t = \frac{1}{1 - \operatorname{Th}^2 t}$$

ó bien, recordando que $\operatorname{Ch} t$ es siempre positivo,

$$\operatorname{Ch} t = \frac{1}{+\sqrt{1 - \operatorname{Th}^2 t}}.$$

Igualmente se tiene

$$\operatorname{Sh} t = \operatorname{Ch} t \operatorname{Th} t = \frac{\operatorname{Th} t}{+\sqrt{1 - \operatorname{Th}^2 t}}.$$

En adelante suprimiremos el signo + ante los radicales tomados positivamente; y todo radical de segundo grado tomado en sentido general, irá precedido del signo $\pm$.

3. *Funciones hiperbólicas pares ó impares.* Se llama, como se sabe, función *par* de una variable t, una función que no cambia de valor, cuando se reemplaza t por $-t$; función *impar* una función que cambia de signo sin cambiar de valor absoluto cuando se reemplaza t por $-t$. Se tiene

$$\mathrm{Ch}(-t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-(-t)})=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})=\mathrm{Ch}\,t;\ \mathrm{Sech}(-t)=\mathrm{Sech}\,t;$$

$$\mathrm{Sh}(-t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-(-t)})=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{t})=-\mathrm{Sh}\,t;$$

$$\mathrm{Cosech}(-t)=-\mathrm{Cosech}\,t;$$

$$\mathrm{Th}(-t)=-\mathrm{Th}\,t;\quad \mathrm{Coth}(-t)=-\mathrm{Coth}\,t.$$

Luego, Ch t, Sech t son funciones pares; Sh t, Th t, Coth t, Cosech t, son funciones impares.

4. *Marcha de las funciones hiperbólicas* Sh t, Ch t, Th t. Según el número anterior basta examinar como varían estas funciones cuando crece t de 0 á ∞; pues si se cambia el signo de t, Ch t queda invariable, mientras que Sh t y Th t no hacen sino cambiar de signo, conservando el mismo valor absoluto.

La función

$$\mathrm{Sh}\,t=\frac{1}{2}\left(e^{t}-\frac{1}{e^{t}}\right)$$

es la diferencia de dos cantidades que son iguales para $t=0$; creciendo t, la primera crece y la segunda decrece indefinidamente. Luego Sh t aumenta de 0 á ∞, al mismo tiempo que la variable.

Cuando t crece de 0 á ∞, la función

$$\mathrm{Ch}\,t=\sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 t}$$

crece de 1 á ∞, al mismo tiempo que Sh t crece de 0 á ∞; y la función

$$\mathrm{Th}\,t=\frac{e^{t}-e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}=\frac{1-\dfrac{1}{e^{2t}}}{1+\dfrac{1}{e^{2t}}}$$

creciendo t de 0 á ∞, crece evidentemente de 0 á 1.

Observación. Se tiene casi $e^3 = 20$, y á partir de un valor de t poco elevado, $t=15$ por ejemplo, e^{-t} es muy pequeño, menor que $\frac{1}{3200000}$. Resulta pues aproximadamente

$$\mathrm{Ch}\, t = \mathrm{Sh}\, t = \frac{1}{2} e^t \quad \mathrm{Th}\, t = 1.$$

5. *Fórmulas correspondientes á* Sh $(t \pm u)$, Ch $(t \pm u)$, Th $(t \pm u)$. Se tiene

$$\mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, u = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \times \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{t+u} + e^{t-u} - e^{-t+u} - e^{-t-u})$$

$$\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, t = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \times \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{t+u} - e^{t-u} + e^{-t+u} - e^{-t-u}).$$

De donde, por adición,

$$\mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, t = \frac{1}{2}(e^{t+u} - e^{-t-u}) = \mathrm{Sh}\,(t+u).$$

Encuéntrase de igual modo

$$\mathrm{Ch}\,(t+u) = \mathrm{Ch}\, t\, \mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Sh}\, u.$$

Dedúcese de aquí

$$\mathrm{Th}\,(t+u) = \frac{\mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, t}{\mathrm{Ch}\, t\, \mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Sh}\, t};$$

ó bien, dividiendo numerador y denominador por Ch u Ch t,

$$\mathrm{Th}\,(t+u) = \frac{\mathrm{Th}\, t + \mathrm{Th}\, u}{1 + \mathrm{Th}\, t\, \mathrm{Th}\, u}.$$

Cambiando el signo de u en las tres fórmulas anteriores, se obtiene

$$\mathrm{Sh}\,(t-u) = \mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, t,$$
$$\mathrm{Ch}\,(t-u) = \mathrm{Ch}\, t\, \mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Sh}\, u,$$

$$\mathrm{Th}\,(t-u) = \frac{\mathrm{Th}\, t - \mathrm{Th}\, u}{1 - \mathrm{Th}\, t\, \mathrm{Th}\, u}.$$

6. *Duplicación*. Haciendo $u = t$ en las tres primeras fórmulas, obtendremos

$$\mathrm{Ch}\, 2t = \mathrm{Ch}^2 t + \mathrm{Sh}^2 t, \quad \mathrm{Sh}\, 2t = 2\, \mathrm{Sh}\, t\, \mathrm{Ch}\, t, \quad \mathrm{Th}\, 2t = \frac{2\, \mathrm{Th}\, t}{1 + \mathrm{Th}^2 t}.$$

Combinada la primera de estas relaciones con la

$$1 = \mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t,$$

da $$\mathrm{Ch}^2 t = \frac{\mathrm{Ch}\,2t + 1}{2}, \quad \mathrm{Ch}\,t = + \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\,2t + 1}{2}},$$

$$\mathrm{Sh}^2 t = \frac{\mathrm{Ch}\,2t - 1}{2}, \quad \mathrm{Sh}\,t = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\,2t - 1}{2}},$$

$$\mathrm{Th}\,t = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\,2t - 1}{\mathrm{Ch}\,2t + 1}}.$$

Se tomará el signo + ó el signo —, según que t sea positivo ó negativo.

Reemplazando $2t$ por t, puede también escribirse

$$\mathrm{Ch}\,\frac{1}{2}t = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathrm{Ch}\,t + 1)}, \qquad \mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}t = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathrm{Ch}\,t - 1)},$$

$$\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}t = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\,t - 1}{\mathrm{Ch}\,t + 1}}.$$

7. *Sumas y diferencias de* Ch *y* Sh *transformadas en productos*. De las fórmulas del número **5** se deduce fácilmente

$$\mathrm{Sh}\,(t + u) + \mathrm{Sh}\,(t - u) = 2\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,u,$$
$$\mathrm{Sh}\,(t + u) - \mathrm{Sh}\,(t - u) = 2\,\mathrm{Sh}\,u\,\mathrm{Ch}\,t,$$
$$\mathrm{Ch}\,(t + u) + \mathrm{Ch}\,(t - u) = 2\,\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Ch}\,u,$$
$$\mathrm{Ch}\,(t + u) - \mathrm{Ch}\,(t - u) = 2\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Sh}\,u.$$

Pongamos $t + u = m$, $t - u = n$, lo cual entraña

$$t = \frac{m + n}{2}, \quad u = \frac{m - n}{2}.$$

Las fórmulas precedentes se transformarán en

$$\mathrm{Sh}\,m + \mathrm{Sh}\,n = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{m + n}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{m - n}{2},$$

$$\mathrm{Sh}\,m - \mathrm{Sh}\,n = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{m - n}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{m + n}{2},$$

$$\mathrm{Ch}\,m + \mathrm{Ch}\,n = 2\,\mathrm{Ch}\,\frac{m + n}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{m - n}{2},$$

$$\mathrm{Ch}\,m - \mathrm{Ch}\,n = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{m + n}{2}\,\mathrm{Sh}\,\frac{m - n}{2}.$$

(Se continuará.)

DISTANCIAS FOCALES DE ESPEJOS Y LENTES (1)

El método gráfico que emplea Aldis en su *Optica geométrica*, para mostrar cómo la distancia focal de un espejo cóncavo está enlazada con las distancias del mismo á dos focos conjugados, puede generalizarse tanto para espejos convexos como para lentes, convergentes y divergentes, lo cual en cualquiera de dichos casos suministra un medio de hallar la distancia focal respectiva; problema algo embarazoso para los alumnos que practican en los gabinetes de Física. Es muy sencillo este método, pero como no sabemos que esté consignado en los libros usuales, no creemos ocioso publicarlo.

Sea f . . . . . la distancia focal,
u . . . . . la distancia del objeto,
v . . . . . la distancia de la imagen;

y entiéndase que todas ellas se miden desde el espejo ó lente, reputándolas *positivas* cuando se cuenten en *sentido contrario* al de los rayos incidentes, y *negativas* cuando se cuenten en el *mismo sentido*.

Se tendrá

en los espejos $$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}, \qquad (1)$$

en las lentes $$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}. \qquad (2)$$

Esto sentado, trácense dos ejes de coordenadas rectangulares OX, OY, y señalado en el ángulo superior de la derecha un punto E, cuyas coordenadas sean f, f, hágase pasar por él una recta cualquiera. La fórmula (1) será aplicable á tal recta, y las distancias del origen O á los puntos de intersección de la misma con los ejes OX, OY, serán un par de valores correlativos de u y v en un espejo cóncavo de distancia

(1) Traducido de la revista mensual *The London, Edimburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Enero 1896, pág. 59.

focal f. Pero si dicha línea en vez de girar en torno del punto E, lo hiciera en torno del punto opuesto E', cuyas coordenadas, en el ángulo inferior de la izquierda, son $-f$, $-f$, la misma fórmula (1) daría los valores de u y v correspondientes á un espejo convexo. Y á su vez, si el punto alrededor del cual girara la recta, fuera el L, cuyas coordenadas, en el ángulo superior de la izquierda, son $-f$, f, ó el L', cuyas coordenadas, en el ángulo inferior de la derecha, son f, $-f$, la fórmula (2) daría los valores de u y v que corresponden, en el primer caso, á lente divergente ó, en el segundo, á lente convergente.

Ofrece este método gráficamente los valores correlativos de u y v en todo espejo ó lente, cuya distancia focal f sea conocida, y permite al alumno ver la serie de valores por los cuales pasa v al variar u de una manera continua desde infinito hasta cero. Es verdad que no es grande la ventaja por este concepto, pues si bien se evita escoger y aplicar fórmulas, hay que recordar las posiciones del punto fijo en torno del cual debe en cada caso girar la recta móvil. Pero hay grande ventaja sin duda, cuando en vez de hallar esa correlación de valores de u y v, se quiere deducir de tales valores, observados en un espejo ó lente, la distancia focal, pues este método gráfico ahorra el cálculo de los valores recíprocos ó inversos de los de u y v, y suministra al propio tiempo una comprobación de la exactitud con que se haya efectuado el experimento.

Basta para ello que el alumno haga lo siguiente: 1.° señalar á lo largo de los ejes OX, OY, en el sentido indicado por el signo respectivo, los valores correspondientes de u y v que se hayan observado; 2.° unir los dos puntos así obtenidos; y 3.° repetir lo antedicho con otro par de valores de u y v, también observados. Esto hecho, la ordenada del punto de intersección de las dos rectas dará en magnitud y signo la distancia focal que se busca. Como comprobación puede trazarse la recta determinada por un tercer par de valores observados, ó en su lugar, la recta bisectriz del ángulo de los ejes de coordenadas ó recta tirada por el origen con inclinación de 45°; pues cualquiera de las dos debe pasar por el punto de intersección de las primeras. No sucederá esto en la práctica exactamente; pero si la diferencia es exigua, con facilidad se inferirá el valor de f, y si la diferencia es grande, será prueba de que deben desecharse los datos con que se contaba y repetirse el experimento.

A continuación ponemos dos ejemplos: uno de espejo cóncavo, y otro de lente convergente. El lector puede hacer los dibujos respectivos en una cuadricula de centímetros ó en otra más reducida á proporción. En el segundo ejemplo se da por efectuada la comprobación con la recta trazada por el origen con inclinación de 45°.

Ejemplo I.—*Espejo cóncavo*

VALORES OBSERVADOS	u	v
	cm	*cm*
Par primero.	60	29·7
Par segundo..	33	50
Par comprobatorio.. . .	41	39
Resultado: $f = 20^{cm}$ próximamente		

Ejemplo II.—*Lente convergente*

VALORES OBSERVADOS	u	v
	cm	*cm*
Par primero.	30·5	—19
Par segundo..	15	—61
Resultado: $f = -12^{cm}$ próximamente		

EDWIN H. BARTON,

Miembro de la Real Sociedad de Edimburgo.

TRAZADO DE LA HIPÉRBOLA (1)

El método usual para trazar hipérbolas deja que desear cuando la porción de la curva está distante del vértice, pues con leves errores en el trazado se agrandan los cometidos luego en la medición de distancias entre puntos de la curva, y apenas se saca provecho alguno de los resultados. El mismo *hiperbolagrafo* de Cunynghame, precioso instrumento para describir el trozo cercano al vértice, no sirve para el caso antedicho.

Hace algún tiempo, con objeto de resolver un problema de Óptica, tuvimos que dibujar varias hipérbolas que debían pasar por un punto bastante lejano de los vértices de la mayor parte de ellas; y después de probar en vano á trazarlas por el método usual, ideamos el siguiente que nos dió buen resultado.

Fúndase en una sabida propiedad, que no estará de más demostrar aquí, deduciéndola de la ecuación más sencilla de la hipérbola, á saber:

$$xy = \text{constante},$$

que es la de dicha curva referida á sus asíntotas OX y OY.

Sean (el lector puede suplir fácilmente la figura) A, B y C tres puntos de la asíntota OX, tales que

$$BC = OA, \quad \text{y por tanto} \quad AC = OB;$$

y sean A′, B′ los puntos en que una recta dirigida por C es cortada por dos paralelas á la asíntota OY, trazadas una por A y otra por B. Los triángulos semejantes AA′C y BB′C

darán $\qquad BC : AC = BB' : AA',$

esto es $\qquad OA : OB = BB' : AA';$

luego $\qquad OA \,.\, AA' = OB \,.\, BB',$

por consiguiente, si el punto A′ es de la hipérbola, el B′ lo será también.

Esto sentado, supóngase que A′ sea el vértice de la rama de hipérbola que ha de delinearse, teniendo por datos dicho

(1) Traducido del *Philosophical Magazine*, Enero, 1896, página 72.

vértice y las asíntotas. Recórtese por una punta un cartón, ó papel fuerte, de manera que en él quede un ángulo entrante O_1BB_1 suplementario del ángulo XOY de las asíntotas trazadas en el papel de dibujo: tal cartón servirá de escuadra movible. Señálese en este cartón la prolongación del canto O_1B y tómese en ella una parte BC igual á la abscisa OA del vértice A′ marcada en el papel de dibujo. Fíjese sobre este papel en el origen O y en el vértice A′, un clavito, ó alfiler, en cada uno de ellos; y sobre el cartón, en el punto C, otro clavito: alinéese el canto O_1B de la escuadra del cartón sobre la asíntota OX, con lo cual el otro canto BB_1 quedará paralelo á la otra asíntota OY; apóyese una regla contra los clavitos A y C; y señálese el punto B′ en que el canto de esta regla corta el canto BB_1 del cartón ó escuadra. Dicho punto B′ pertenecerá á la hipérbola, y del mismo modo se hallarán otros puntos deslizando la escuadra sobre la asíntota OX. Con este método se tiene la ventaja de encontrar directamente el valor de la ordenada y correlativo de un valor dado de la abscisa x; pues basta para ello colocar la escuadra de manera que $OB = x$, y proceder como queda dicho.

Por de contado puede construirse de metal el mencionado mecanismo, y arreglarse de modo que se deslice á lo largo de la asíntota OX, trazando una curva continua. Bastan dos reglas de latón unidas por un gozne en C y cruzadas por una regla trabada con una de ellas, de manera que pueda variarse el radio desde C y á la vez el ángulo que este radio forme con la otra regla. Esa otra que cruza, puede llevar una pluma, pincel ó lápiz, compelido á correr con ella y oprimido por un muellecito contra el canto paralelo á la asíntota OY. Con un tosco modelo de esta hechura, del cual nos servíamos, se trabajaba bastante bien. Adviértase que las distancias desde el vértice á los puntos de la curva se miden sobre el canto de la regla que gira, y por tanto, puede obtenerse grande exactitud, ya se recurra á una sencilla escuadra de cartón ó á un instrumento de metal, con mayor esmero fabricado.

George J. Burch,
Doctor en Filosofía.

CUESTIONES PROPUESTAS

11. Compónese la masa de pan de $^{13}/_{35}$ de agua por $^{22}/_{35}$ de harina. El peso del pan cocido es los $^{6}/_{7}$ de su peso en masa.—¿Qué cantidad habrá que poner de harina y de agua para obtener 352 kg. de pan?

12. Tres trozos de hielo son tales, que el volumen del primero excede en $^{1}/_{8}$ al del segundo; éste es los $^{16}/_{27}$ del volumen del tercero; y la diferencia de los del primero y tercero es de 1,005093 m^3.—¿Cuántos litros de agua dará la fusión de los tres trozos, sabiendo que el agua aumenta $^{1}/_{9}$ de su volumen al pasar del estado líquido al sólido?

13. Demostrar que el polinomio $1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots + x^{(p-1)n}$ es un múltiplo de $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{(p-1)}$ siendo n y p dos números primos entre sí.

14. Demostrar que $(p-1)!$ dividido por la suma de los $(p-1)$ primeros números da $(p-1)$ de resto.

15. Un plano Q se mueve sobre un plano fijo P de modo que todos sus puntos describen curvas cerradas; se supone que los arcos de estas curvas, representados materialmente, tienen una masa proporcional al ángulo que ha girado el plano Q para engendrarlos. Demostrar que dichas curvas tienen todas el mismo centro de gravedad.—E. Duporcq.

16. Las cónicas que tienen entre sí un contacto de tercer orden en un punto dado, tienen en este punto una misma tangente, un mismo diámetro y un mismo radio de curvatura. Demostrar *geométricamente* que el lugar de sus focos es una estrofoide.—A. Goulard.

17. Sean C y D dos puntos de una circunferencia situados á un mismo lado de la cuerda AB. Determinar *geométricamente* un punto E de la circunferencia, de suerte que DE y CE corten á AB en dos puntos equidistantes de su punto medio.

18. Demostrar por el método de los cuadrinomios los teoremas de Apolonio relativos á las cónicas.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.