ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

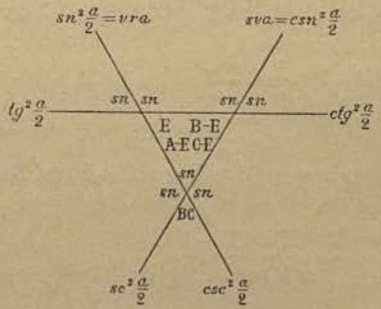
Núm. 9 SEPTIEMBRE 1896

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

(*Continuación.* Véase pág. 149)

Para resolver los triángulos esféricos oblicuángulos, en el caso de que sean conocidos los tres ángulos, proponemos el

Diagrama 18



formado con los números trigonométricos del lado a del triángulo, con los senos de los ángulos B, C del mismo, con el del semiexceso E de la suma de los tres ángulos sobre 180°, y con los de las diferencias A—E, B—E, C—E entre cada uno de los ángulos A, B, C y el semiexceso indicado. De él se derivan las expresiones trigonométricas usuales del cuadrado de la mitad de un lado esférico *a*, y las especiales de Mendoza, que dan el valor directo del ángulo entero.

Aplicando las mismas reglas que en los dos diagramas anteriores, obtendremos:

501) $vr\,a = \dfrac{sn\,E\,sn\,(A-E)}{sn\,B\,sn\,C}$ 502) $vr\,a = sn\,E\,sn\,(A-E)\,csc\,B\,csc\,C$

503) $sn^2\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{sn\,E\,sn\,(A-E)}{sn\,B\,sn\,C}$

504) $sn\,\dfrac{a}{2} = \sqrt{sn\,E\,sn\,(A-E)\,csc\,B\,csc\,C}$

505) $tg^2\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{sn\,E\,sn\,(A-E)}{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)}$

506) $tg\,\dfrac{a}{2} = \sqrt{sn\,E\,sn\,(A-E)\,csc\,(B-E)\,csc\,(C-E)}$

507) $sc^2\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{sn\,B\,sn\,C}{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)}$

508) $sc\,\dfrac{a}{2} = \sqrt{sn\,B\,sn\,C\,csc\,(B-E)\,csc\,(C-E)}$

509) $sv\,a = \dfrac{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)}{sn\,B\,sn\,C}$

510) $sv\,a = sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)\,csc\,B\,csc\,C$

511) $csn^2\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)}{sn\,B\,sn\,C}$

512) $csn\,\dfrac{a}{2} = \sqrt{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)\,csc\,B\,csc\,C}$

513) $ctg^2\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)}{sn\,E\,sn\,(A-E)}$

$$514)\quad ctg\,\frac{a}{2}=\sqrt{sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)\,csc\,E\,csc\,(A-E)}$$

$$515)\quad csc^2\,\frac{a}{2}=\frac{sn\,B\,sn\,C}{sn\,E\,sn\,(A-E)}$$

$$516)\quad csc\,\frac{a}{2}=\sqrt{sn\,B\,sn\,C\,csc\,E\,csc\,(A-E)}$$

Mediante una evolución circular entre las letras A, B, C se encuentran las fórmulas correspondientes al lado *b*.

$$517)\quad vr\,b=\frac{sn\,E\,sn\,(B-E)}{sn\,A\,sn\,C}\qquad 518)\quad vr\,b=sn\,E\,sn\,(B-E)\,csc\,A\,csc\,C$$

$$519)\quad sn^2\,\frac{b}{2}=\frac{sn\,E\,sn\,(B-E)}{sn\,A\,sn\,C}$$

$$520)\quad sn\,\frac{b}{2}=\sqrt{sn\,E\,sn\,(B-E)\,csc\,A\,csc\,C}$$

$$521)\quad tg^2\,\frac{b}{2}=\frac{sn\,E\,sn\,(B-E)}{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)}$$

$$522)\quad tg\,\frac{b}{2}=\sqrt{sn\,E\,sn\,(B-E)\,csc\,(A-E)\,csc\,(C-E)}$$

$$523)\quad sc^2\,\frac{b}{2}=\frac{sn\,A\,sn\,C}{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)}$$

$$524)\quad sc\,\frac{b}{2}=\sqrt{sn\,A\,sn\,C\,csc\,(A-E)\,csc\,(C-E)}$$

$$525)\quad sv\,b=\frac{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)}{sn\,A\,sn\,C}$$

$$526)\quad sv\,b=sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)\,csc\,A\,csc\,C$$

$$527)\quad csn^2\,\frac{b}{2}=\frac{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)}{sn\,A\,sn\,C}$$

528) $csn \frac{b}{2} = \sqrt{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)\,csc\,A\,csc\,C}$

529) $ctg^2 \frac{b}{2} = \frac{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)}{sn\,E\,sn\,(B-E)}$

530) $ctg \frac{b}{2} = \sqrt{sn\,(A-E)\,sn\,(C-E)\,csc\,E\,csc\,(B-E)}$

531) $csc^2 \frac{b}{2} = \frac{sn\,A\,sn\,C}{sn\,E\,sn\,(B-E)}$

532) $csc \frac{b}{2} = \sqrt{sn\,A\,sn\,C\,csc\,E\,csc\,(B-E)}$

Por nueva evolución circular entre las letras A, B, C se hallan las fórmulas correspondientes al lado *c*.

533) $vr\,c = \frac{sn\,E\,sn\,(C-E)}{sn\,A\,sn\,B}$

534) $vr\,c = sn\,E\,sn\,(C-E)\,csc\,A\,csc\,B$

535) $sn^2 \frac{c}{2} = \frac{sn\,E\,sn\,(C-E)}{sn\,A\,sn\,B}$

536) $sn \frac{c}{2} = \sqrt{sn\,E\,sn\,(C-E)\,csc\,A\,csc\,B}$

537) $tg^2 \frac{c}{2} = \frac{sn\,E\,sn\,(C-E)}{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)}$

538) $tg \frac{c}{2} = \sqrt{sn\,E\,sn\,(C-E)\,csc\,(A-E)\,csc\,(B-E)}$

539) $sc^2 \frac{c}{2} = \frac{sn\,A\,sn\,B}{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)}$

540) $sc \frac{c}{2} = \sqrt{sn\,A\,sn\,B\,csc\,(A-E)\,csc\,(B-E)}$

541) $sv\,c = \dfrac{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)}{sn\,A\;sn\,B}$

542) $sv\,c = sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)\,csc\,A\,csc\,B$

543) $csn^2\,\dfrac{c}{2} = \dfrac{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)}{sn\,A\;sn\,B}$

544) $csn\,\dfrac{c}{2} = \sqrt{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)\,csc\,A\,csc\,B}$

545) $ctg^2\,\dfrac{c}{2} = \dfrac{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)}{sn\,E\,sn\,(C-E)}$

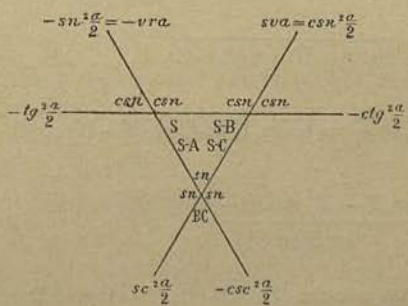
546) $ctg\,\dfrac{c}{2} = \sqrt{sn\,(A-E)\,sn\,(B-E)\,csc\,E\,csc\,(C-E)}$

547) $csc^2\,\dfrac{c}{2} = \dfrac{sn\,A\;sn\,B}{sn\,E\,sn\,(C-E)}$

548) $csc\,\dfrac{c}{2} = \sqrt{sn\,A\,sn\,B\,csc\,E\,csc\,(C-E)}$

Pueden también resolverse los triángulos esféricos oblicuángulos, en el caso de que sean conocidos los tres ángulos, mediante el

Diagrama 19



formado con los números trigonométricos del lado a del triángulo, con los senos de los ángulos B, C, con el coseno de la se–

misuma S de los tres ángulos, y con los de las diferencias S—A, S—B, S—C, entre la semisuma indicada y cada uno de los ángulos A, B, C. De él se derivan las expresiones trigonométricas usuales del cuadrado de la mitad de un lado esférico *a*, y las especiales de Mendoza, que dan el valor directo del ángulo entero.

Aplicando las mismas reglas que en los tres diagramas anteriores, y trasladando á los segundos miembros los signos negativos, obtendremos:

549) $vr\,\mathrm{a} = -\dfrac{csn\,\mathrm{S}\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{sn\,\mathrm{B}\,sn\,\mathrm{C}}$

550) $vr\,\mathrm{a} = -csn\,\mathrm{S}\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{A})\,csc\,\mathrm{B}\,csc\,\mathrm{C}$

551) $sn^2\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = -\dfrac{csn\,\mathrm{S}\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{sn\,\mathrm{B}\,sn\,\mathrm{C}}$

552) $sn\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{-csn\,\mathrm{S}\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{A})\,csc\,\mathrm{B}\,csc\,\mathrm{C}}$

553) $tg^2\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = -\dfrac{csn\,\mathrm{S}\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})}$

554) $tg\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{-csn\,\mathrm{S}\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{A})\,sc\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,sc\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})}$

555) $sc^2\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = \dfrac{sn\,\mathrm{B}\,sn\,\mathrm{C}}{csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})}$

556) $sc\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{sn\,\mathrm{B}\,sn\,\mathrm{C}\,sc\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,sc\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})}$

557) $sv\,\mathrm{a} = \dfrac{csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{sn\,\mathrm{B}\,sn\,\mathrm{C}}$

558) $sv\,\mathrm{a} = csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})\,csc\,\mathrm{B}\,csc\,\mathrm{C}$

559) $csn^2\,\dfrac{\mathrm{a}}{2} = \dfrac{csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{B})\,csn\,(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{sn\,\mathrm{B}\,sn\,\mathrm{C}}$

560) $csn \frac{a}{2} = \sqrt{csn\,(S-B)\; csn\,(S-C)\; csc\,B\; csc\,C}$

561) $ctg^2 \frac{a}{2} = -\frac{csn\,(S-B)\; csn\,(S-C)}{csn\,S\; csn\,(S-A)}$

562) $ctg \frac{a}{2} = \sqrt{-csn\,(S-B)\; csn\,(S-C)\; sc\,S\; sc\,(S-A)}$

563) $csc^2 \frac{a}{2} = -\frac{sn\,B\; sn\,C}{csn\,S\; csn\,(S-A)}$

564) $csc \frac{a}{2} = \sqrt{-sn\,B\; sn\,C\; sc\,S\; sc\,(S-A)}$

Las fórmulas correspondientes al lado *b* se obtienen por evolución circular entre las letras A, B, C, y son:

565) $vr\,b = -\frac{csn\,S\; csn\,(S-B)}{sn\,A\; sn\,C}$

566) $vr\,b = -\,csn\,S\; csn\,(S-B)\; csc\,A\; csc\,C$

567) $sn^2 \frac{b}{2} = -\frac{csn\,S\; csn\,(S-B)}{sn\,A\; sn\,C}$

568) $sn \frac{b}{2} = \sqrt{-csn\,S\; csn\,(S-B)\; csc\,A\; csc\,C}$

569) $tg^2 \frac{b}{2} = -\frac{csn\,S\; csn\,(S-B)}{csn\,(S-A)\; csn\,(S-C)}$

570) $tg \frac{b}{2} = \sqrt{-\,csn\,S\; csn\,(S-B)\; sc\,(S-A)\; sc\,(S-C)}$

571) $sc^2 \frac{b}{2} = \frac{sn\,A\; sn\,C}{csn\,(S-A)\; csn\,(S-C)}$

$$572)\quad sc\,\frac{b}{2} = \sqrt{sn\,A\,sn\,C\,sc\,(S-A)\,sc\,(S-C)}$$

$$573)\quad sv\,b = \frac{csn\,(S-A)\,csn\,(S-C)}{sn\,A\,sn\,C}$$

$$574)\quad sv\,b = csn\,(S-A)\,csn\,(S-C)\,csc\,A\,csc\,C$$

$$575)\quad csn^2\,\frac{b}{2} = \frac{csn\,(S-A)\,csn\,(S-C)}{sn\,A\,sn\,C}$$

$$576)\quad csn\,\frac{b}{2} = \sqrt{csn\,(S-A)\,csn\,(S-C)\,csc\,A\,csc\,C}$$

$$577)\quad ctg^2\,\frac{b}{2} = -\frac{csn\,(S-A)\,csn\,(S-C)}{csn\,S\,csn\,(S-B)}$$

$$578)\quad ctg\,\frac{b}{2} = \sqrt{-csn\,(S-A)\,csn\,(S-C)\,sc\,S\,sc\,(S-B)}$$

$$579)\quad csc^2\,\frac{b}{2} = -\frac{sn\,A\,sn\,C}{csn\,S\,csn\,(S-B)}$$

$$580)\quad csc\,\frac{b}{2} = \sqrt{-sn\,A\,sn\,C\,sc\,S\,sc\,(S-B)}$$

Las fórmulas correspondientes al lado c se hallan por nueva evolución circular entre las letras A, B, C, y son:

$$581)\quad vr\,c = -\frac{csn\,S\,csn\,(S-C)}{sn\,A\,sn\,B}$$

$$582)\quad vr\,c = -\,csn\,S\,csn\,(S-C)\,csc\,A\,csc\,B$$

$$583)\quad sn^2\,\frac{c}{2} = -\frac{csn\,S\,csn\,(S-C)}{sn\,A\,sn\,B}$$

$$584)\quad sn\,\frac{c}{2} = \sqrt{-csn\,S\,csn\,(S-C)\,csc\,A\,csc\,B}$$

585) $$tg^2\,\frac{c}{2} = -\frac{csn\,S\; csn\,(S-C)}{csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)}$$

586) $$tg\,\frac{c}{2} = \sqrt{-csn\,S\; csn\,(S-C)\; sc\,(S-A)\; sc\,(S-B)}$$

587) $$sc^2\,\frac{c}{2} = \frac{sn\,A\; sn\,B}{csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)}$$

588) $$sc\,\frac{c}{2} = \sqrt{sn\,A\; sn\,B\; sc\,(S-A)\; sc\,(S-B)}$$

589) $$sv\,c = \frac{csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)}{sn\,A\; sn\,B}$$

590) $$sv\,c = csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)\; csc\,A\; csc\,B$$

591) $$csn^2\,\frac{c}{2} = \frac{csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)}{sn\,A\; sn\,B}$$

592) $$csn\,\frac{c}{2} = \sqrt{csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)\; csc\,A\; csc\,B}$$

593) $$ctg^2\,\frac{c}{2} = -\frac{csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)}{csn\,S\; csn\,(S-C)}$$

594) $$ctg\,\frac{c}{2} = \sqrt{-csn\,(S-A)\; csn\,(S-B)\; sc\,S\; sc\,(S-C)}$$

595) $$csc^2\,\frac{c}{2} = -\frac{sn\,A\; sn\,B}{csn\,S\; csn\,(S-C)}$$

596) $$csc\,\frac{c}{2} = \sqrt{-sn\,A\; sn\,B\; sc\,S\; sc\,(S-C)}$$

(*Se continuará.*)

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 153)

22. *Tractriz.* Llámase *tractriz* el lugar de los puntos análogos á m. Designando por θ el ángulo mTP cuya tangente trigonométrica es igual á y', resulta

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{Sh}\frac{x}{a}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{Th}\frac{x}{a}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\operatorname{Ch}\frac{x}{a}}.$$

Sean ξ, η las coordenadas de m; se tendrá

$$\eta = m\mathrm{P}\cos m\mathrm{PM} = a\cos\theta = \frac{a}{\operatorname{Ch}\frac{x}{a}},$$

$$\xi = \mathrm{OP} - m\mathrm{P}\cos m\mathrm{PT} = x - a\operatorname{sen}\theta = x - a\operatorname{Th}\frac{x}{a}.$$

Dedúcese de aqui

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} : \frac{d\xi}{dx} = -\frac{\operatorname{Sh}\frac{x}{a}}{\operatorname{Ch}^2\frac{x}{a}} : \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2\frac{x}{a}}\right) = -\frac{1}{\operatorname{Sh}\frac{x}{a}} =$$

$$= -\cot\theta = -\operatorname{tang} m\mathrm{PT}.$$

Así, la tangente en m á la tractriz está dirigida según mP. La longitud $m\mathrm{P} = a$ de esta tangente contada hasta el eje de las x es constante. *La tractriz es* pues *una curva de tangentes iguales.* En A, la tangente es el eje de las y, mas como la curva es simétrica con relación á OY, A es un punto de retroceso. El eje de las x es evidentemente asíntota de la curva.

La normal mM á la curva es tangente á *la catenaria*, la cual *es* por tanto *la evoluta de la tractriz*, y el radio de curvatura de ésta en M es igual á mM ó á AM.

23. *Pseudoesfera.* La superficie, en forma de huso indefinido, engendrada por la tractriz girando alrededor de su asíntota, se llama *pseudoesfera*. En cada punto m sus dos radios de curvatura principales son mM y mT, dirigidos en sentido contrario. Por consiguiente la curvatura de la superficie (en el sentido de Gauss) es

$$-\frac{1}{mM \times mT} = -\frac{1}{mP^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

La pseudoesfera es pues *una superficie de curvatura constante negativa*, como la esfera es una superficie de curvatura constante positiva.

El área de la pseudoesfera desde su arista de retroceso hasta el plano correspondiente á un valor x de la variable independiente es

$$2\pi\int_0^x \eta\sqrt{d\xi^2+d\eta^2} = 2\pi\int_0^x \frac{a}{\mathrm{Ch}\frac{x}{a}}\sqrt{\frac{\mathrm{Sh}^2\frac{x}{a}}{\mathrm{Ch}^4\frac{x}{a}}+\frac{\mathrm{Sh}^4\frac{x}{a}}{\mathrm{Ch}^4\frac{x}{a}}}\,dx$$

$$=2\pi a\int_0^x \frac{\mathrm{Sh}\frac{x}{a}\,dx}{\mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}} = -2\pi a^2\left[\frac{1}{\mathrm{Ch}\frac{x}{a}}\right]_0^x = 2\pi a^2\left(1-\frac{1}{\mathrm{Ch}\frac{x}{a}}\right).$$

Para x infinito, se encuentra $2\pi a^2$ para la superficie de la semipseudoesfera. Luego *la pseudoesfera entera, de parámetro* a, *tiene la misma superficie que la esfera de radio* a.

El volumen de la pseudoesfera de 0 á x, es

$$\pi\int_0^x \eta^2 d\xi = \pi\int_0^x \frac{a^2}{\mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}}\cdot\frac{\mathrm{Sh}^2\frac{x}{a}}{\mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= \pi a^3\int_0^x \mathrm{Th}^2\frac{x}{a}\,d\mathrm{Th}\frac{x}{a} = \frac{\pi a^3}{3}\mathrm{Th}^3\frac{x}{a}.$$

Para x infinito, se encuentra $\frac{1}{3}\pi a^3$ para el volumen de la semi-pseudoesfera. Luego *la pseudoesfera entera, de parámetro* a, *tiene un volumen igual á la mitad del volumen de la esfera de radio* a.

24. *Parábola y paraboloide de revolución*. La ecuación usual de la parábola $y^2 = 2px$ puede reemplazarse por las siguientes:

$$y = p\,\mathrm{Sh}\,t, \qquad x = \frac{1}{2}p\,\mathrm{Sh}^2\,t.$$

Dedúcese de aquí

$$dy = p\,\mathrm{Ch}\,t\,dt, \qquad dx = p\,\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t\,dt, \qquad ds = p\,\mathrm{Ch}^2\,t\,dt.$$

El arco s de parábola comprendido entre los puntos M(x, y) y M$'(x, -y)$, simétricos con relación al eje, está dado por la fórmula

$$s = p\int_{-t}^{t}\mathrm{Ch}^2 t\,dt = \frac{1}{2}p\int_{-t}^{t}(\mathrm{Ch}\,2t+1)\,dt = \frac{1}{2}p(\mathrm{Sh}\,2t + 2t)$$

$$= p\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,t + pt.$$

(Se continuará.)

RAÍCES DE LOS NÚMEROS

La aplicación de los logaritmos á los cálculos numéricos ha facilitado de tal modo las operaciones, que sería inconveniente desaprovechar en éstas las ventajas del gran invento de Neper. Nada, sin embargo, autoriza para prescindir por completo de los procedimientos directos; y en fuerza de esta convicción vamos á valernos de ellos, estableciendo un método general y abreviado para extraer las raíces de los números.

Formadas las potencias del grado m de los nueve enteros de una cifra, el cuadro que las contenga podrá desde luego proporcionar las raíces m^{mas} que sólo deban componerse de un guarismo. En las que se extiendan á más, las mismas razones que acreditan la tramitación de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica, demostrarán la necesidad de dividir el número entero de que se trate en períodos ó secciones de m cifras contando de derecha á izquierda; la de incorporar á cada resta obtenida en el transcurso de las operaciones la sección siguiente; y la de separar $(m - 1)$ guarismos á la derecha del total resultante, para partir lo que quede á la izquierda por m veces la potencia $(m - 1)$ de la parte ya encontrada.

Esto supuesto, cualquiera que sea, en la raíz m^{ma} que se quiere extraer, la cifra u que se calcule, las precedentes siempre constituirán con respecto á ella una totalidad d de decenas por cuya intervención, formando la potencia m de $(d + u)$, habrá de comprobarse el guarismo que se tantea. Dicha potencia ofrece el siguiente desarrollo:

$$d^m + md^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2}u^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{m-3}u^3 + \ldots\ldots + u^m$$

valor que se ha de restar de la cantidad á que pertenezca por raíz m^{ma} entera la $(d + u)$. Pero como al llegar al cálculo de esta u se habrá formado y restado ya antes d^m, solo faltará rebajar del dividendo respectivo junto con las cifras separadas lo que representa la expresión

$$md^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1 . 2} d^{m-2} u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} d^{m-3} u^3 + \ldots + u^m$$

que, separando el factor común, da

$$u\left(md^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2} d^{m-2} u + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} d^{m-3} u^2 + \ldots + u^{m-1}\right)$$

y también

$$\text{(I)}\quad u\left(md^{m-1} + md^{m-1} \times \frac{(m-1)u}{2 . d} + \right.$$
$$\left. + md^{m-1} \times \frac{(m-1)(m-2)u^2}{2 . 3 . d^2} + \ldots\ldots + u^{m-1}\right)$$

Donde podrá observarse que el guarismo u siempre se debe multiplicar por la suma de m sumandos de los cuales cada uno de los posteriores al primero procede del inmediato anterior multiplicado por $\frac{(m-n+1)}{n} \cdot \frac{u}{d}$, siendo n el número de orden de aquel de que se trata, y teniendo que comenzar su escritura en el sitio de las unidades que éste represente.

Para determinar la cifra que ha de seguir á la que acaba de encontrarse, se tiene que emplear por divisor

$$m(d + u)^{m-1} = m \times \ldots\ldots$$

$$\left(d^{m-1} + (m-1)ud^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 . 2} u^2 d^{m-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3} u^3 d^{m-4} + \ldots\ldots + u^{m-1}\right)$$

$$= md^{m-1} + m(m-1)ud^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2} u^2 d^{m-3} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 .} u^3 d^{m-4} + \ldots\ldots + mu^{m-1}$$

Comparando con la expresión del paréntesis (1) este nuevo divisor, se infiere que para obtenerle, debe multiplicarse respectivamente cada sumando de aquélla por el número de orden que le corresponda, reuniendo luego todos los productos, ó debe agregarse á la suma que antes se aprovechó cada uno de los sumandos multiplicado por (n — 1), siendo también n el mismo número de orden ya dicho.

Del análisis que precede, dedúcese la siguiente regla: *Para extraer la raiz* m^{ma} *de un número entero, se le descompone en secciones de á* m *cifras, comenzando por la derecha, donde también se ponen las rayas de la división para escribir dentro de ellas los guarismos que han de constituir el resultado, y para anotar bajo de las mismas los divisores sucesivos que se vayan empleando. Se extrae la raiz* m *del primer grupo de la izquierda, con lo cual se tendrá la primera cifra de la raiz; y elevando esta cifra á la potencia* m, *el valor que produzca se resta del dicho grupo. Al lado del resto se coloca la sección segunda; se separan* (m — 1) *guarismos á la derecha del total así obtenido, y se divide la cantidad que quede á la izquierda por* m *veces la potencia* (m — 1) *de la cifra antes encontrada: el cociente entero será la segunda cifra de la raiz, ó una cifra demasiado grande. Para comprobarla se la multiplicará por la suma de* m *cantidades que deberán escribirse unas debajo de otras, y cada una un lugar más hacia la derecha que su inmediata anterior. La primera de estas cantidades siempre es el mismo divisor ya utilizado; y cualquiera de las restantes se compone de la que á ella inmediatamente preceda multiplicada por* (m — n + 1) eneavos *de la cifra que se calcula, dividida por las decenas obtenidas, representando la* n *el número de orden del sumando de que se trate. Si resulta bueno el guarismo que se tantea, su producto por la suma mencionada se resta de lo que sirvió de dividendo junto con las cifras separadas. Al lado de este nuevo resto se coloca la sección siguiente, se separan* (m — 1) *guarismos á la derecha de lo que asi resulte, y se divide lo que subsista á la izquierda por* m *veces la potencia* (m — 1) *de toda la parte de raíz ya encontrada. Para hallar este divisor, basta añadir á la suma* *comprobatoria de antes cada sumando de aquélla multiplicado por el número que designa el lugar del precedente, ó también, reunir los productos que resulten de multiplicar respectivamente los sumandos que la formen por el número del orden en que cada uno figure. El cociente será la tercera cifra de la raíz, ó una cifra demasiado grande, que deberá comprobarse de la misma manera que la anterior, para seguir luego la operación sin variar nunca de trámites.*

Si al tantear una cifra se atiende desde luego al producto de ella por las unidades superiores de la suma comprobatoria, podrá muchas veces desecharse pronto el guarismo que peque por alto.

Propongámonos por ejemplo extraer la raíz quinta del 3570467226624 teniendo en cuenta que

$$1^5 = 1 \qquad 2^5 = 32 \qquad 3^5 = 243$$
$$4^5 = 1024 \qquad 5^5 = 3125 \qquad 6^5 = 7776$$
$$7^5 = 16807 \qquad 8^5 = 32768 \qquad 9^5 = 59049$$

OPERACIÓN

357,04672,26624	324		
243	$md^{m-1} = 5.3^4 = 405 \ldots . \times 1 =$	405	
	$540 \ldots \times 2 =$	1080	
1140,4672	$360 \ldots \times 3 =$	1080	
925 4432	$120 . \times 4 =$	480	
	$16 \times 5 =$	80	
21502,4026624			
21502 4026624	4627216×2	5242880 = Seg.º Div.r	
0	540	1310720	
	720	163840	
	360	10240	
	64	256	
Segundo divisor. . . .	5242880	53756006656×4	

Descompuesto el número en períodos de cinco cifras, y habiendo quedado tres de ellas á la izquierda, se ha extraído la raíz quinta del 357, que, siendo 3, se ha escrito dentro de las rayas de dividir. La quinta potencia de ese 3, ó sea el 243, se ha restado de dicho 357, y á continuación de la resta 114 se ha colocado el grupo 04672, con lo cual resultó 11404672, de cuya cantidad se separaron cuatro cifras á la derecha, pasando á dividir el 1140 de la izquierda por 405, valor de cinco veces la cuarta potencia del 3 antes obtenido. Esta división ha proporcionado para segunda cifra de la raíz un 2 que también se ha escrito dentro de las rayas; y para comprobarle se le ha multiplicado por 4627216, suma de las cinco cantidades siguientes:

primera, el mismo divisor 405;

segunda, el producto 540 del dicho 405 por $\frac{5-2+1}{2} \times \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3}$;

tercera, el producto 360 del 540 por $\frac{5-3+1}{3} \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3}$;

cuarta, el producto 120 del 360 por $\frac{5-4+1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$;

y *quinta*, el producto 16 del 120 por $\frac{5-5+1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$;

todas las cuales se han anotado avanzando cada una un lugar hacia la derecha con respecto á aquél en que comenzó la anterior.

El resultado 9254432 se ha restado de 11404672, y al lado de la resta 2150240 se ha colocado el período 26624, con lo que viene á formarse 215024026624, de cuya derecha se han separado luego cuatro cifras. El número 21502402 compuesto por las otras, se ha partido por 5242880, quíntuplo de la cuarta potencia de 32, suministrando así 4 para tercer guarismo de la raíz. Para determinar dicho divisor 5242880 ha bastado añadir á 4627216, conservándoles en el sitio de sus respectivas unidades, $540 \times 1 = 540$; $360 \times 2 = 720$; $120 \times 3 = 360$; y $16 \times 4 = 64$; ó sumar con igual condición los productos $405 \times 1 = 405$; $540 \times 2 = 1080$;

$360 \times 3 = 1080$; $120 \times 4 = 480$; y $16 \times 5 = 80$. La seguridad de que era buena cifra de la raíz el 4, se ha adquirido multiplicándole por 53756006656, suma del divisor 5242880, con $5242880 \times 2 . \frac{4}{32} = 1310720$, con $1310720 \times 1 . \frac{4}{32} = 163840$, con $163840 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{32} = 10240$, y con $10240 \times \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{32} = 256$. Como el resultado 215024026624 es idéntico al dividendo junto con las cifras separadas, la resta *cero* manifiesta que la raíz es exacta y que por consiguiente

$$\sqrt[5]{357046722664} = 3224$$

El primero de todos los divisores, md^{m-1}, se pudo hallar fácilmente mediante la operación $d^m \times \frac{m}{d}$, que concretada al caso del ejemplo, da $243 \times \frac{5}{3} = 405$.

Para aproximar cualesquiera raíces, y para extraer las de las fracciones, se sigue una marcha análoga á las que exigen la raíz cuadrada y la raíz cúbica; y cuando los índices no son números primos, se las reemplaza por las sucesivas de los grados que designen los factores.

Los procedimientos adoptados, con respecto á las raíces cuadradas y cúbicas, por Mr. L. B. Francoeur en su *Tratado de Aritmética aplicada á la Banca, al Comercio y á la Industria*, y por Mr. León Lalanne en la obra titulada *Un millón de hechos*, no son más que casos particulares del método general que acabamos de exponer.

ESTEBAN SANCHIS BARRACHINA,
Catedrático del Instituto de Valencia.

SOLUCIONES DE CUESTIONES PROPUESTAS

CUESTIÓN 24

Demostrar que $n(n^2+5)$ es un múltiplo de 6, cualquiera que sea el número n.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN

Podemos escribir siempre

$$n = m \,.\, 6 \pm r,$$

siendo r *un número igual ó menor que tres en el caso de no ser cero.* De aquí se sigue

$$n(n^2+5) = (m \,.\, 6 \pm r)\left[(m \,.\, 6 \pm r)^2 + 5\right] =$$

$$= (m \,.\, 6 \pm r)(m^2 \,.\, 36 \pm 2\, m \,.\, 6\, r + r^2 + 5) =$$

$$= m \,.\, 6\,(m^2 \,.\, 36 \pm 2m \,.\, 6r + r^2 + 5) \pm 6\,(r \,.\, m^2 \,.\, 6 \pm 2\, mr^2) \pm r\,(r^2+5).$$

Luego $$n(n^2+5) \equiv r\,(r^2+5) \pmod 6,$$

siendo r *uno de los números cero, uno, dos ó tres.*

Pero $r(r^2+5)$ es divisible por 6, en este supuesto, como es fácil comprobar por la sustitución de valores, luego $n(n^2+5)$ será siempre divisible por 6.

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

Si n es divisible por 3 é impar, n^2+5 será par, y $n(n^2+5)$ será divisible por 6.

Si n es divisible por 3 y par, no hay necesidad de demostración.

Si n no es divisible por 3, podremos siempre poner $n = m.3 \pm 1$

y $$n(n^2+5) = (m \,.\, 3 \pm 1)(m^2 \,.\, 9 \pm 6\, m + 1 + 5) =$$

$$= (\pm 6\, m + 6)(m \,.\, 3 \pm 1) + m^2 \,.\, 9\,(m \,.\, 3 \pm 1)$$

luego $$n(n^2+5) \equiv m^2 \,.\, 9\,(m \,.\, 3 \pm 1) \pmod 6.$$

Pero si m es par, $m^2 \,.\, 9$ será divisible por 6, y en consecuencia también lo será $n(n^2+5)$; y si m es impar, $m \,.\, 3 \pm 1$ será par, luego $m^2 \,.\, 9\,(m \,.\, 3 + 1)$ será divisible por 6, y $n(n^2+5)$ lo será igualmente.

TERCERA DEMOSTRACIÓN

Suponiendo $n = 1$, $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6, y vamos á demostrar que si se tiene para un valor q de n

$$(1) \qquad q(q^2 + 5) = m \cdot 6,$$

esta igualdad valdrá para $n = q + 1$.

En efecto:

$$(q + 1)\left[(q + 1)^2 + 5\right] = (q + 1)(q^2 + 2q + 1 + 5) =$$
$$= q^3 + 2q^2 + q + 5q + q^2 + 2q + 1 + 5 =$$
$$= q(q^2 + 5) + 3q^2 + 3q + 6 =$$
$$= (m + 1)\,6 + 3q^2 + 3q,$$

en virtud de la igualdad (1).

Tendremos por tanto,

$$(q + 1)\left[(q + 1)^2 + 5\right] \equiv 3q^2 + 3q \pmod 6.$$

Si demostramos, pues, que

$$3(q^2 + q)$$

es divisible por 6, tendremos conseguido nuestro objeto.

Basta para ésto demostrar que $q^2 + q$ es divisible por dos. Ahora, si q es par, esto es evidente, y si q es impar, su cuadrado será impar, y la suma de dos números impares es par. Luego siempre $q^2 + q$ es divisible por 2, y en consecuencia $3(q^2 + q)$ lo es por 6. De donde, $(q + 1)\left[(q + 1)^2 + 5\right]$ es siempre divisible por 6, en el supuesto de que $q(q^2 + 5)$ lo sea. Pero $1(1^2 + 5)$ es divisible por 6, luego $2(4 + 5)$, $3(9 + 5)$ etc., lo serán también.

Dr. Ventura REYES PRÓSPER,
Catedrático del Instituto de Cuenca.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.