ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

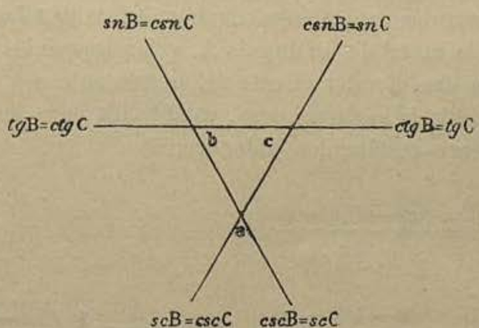
Núm. 4 ABRIL 1896

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

(*Continuación.* Véase pág. 45)

Los diagramas 5, 6, 7 y 8 están condensados en el

Diagrama 9.º



del cual se derivan, por las reglas conocidas, todas las relaciones que ligan tres á tres los elementos del triángulo rectilíneo-rectángulo.

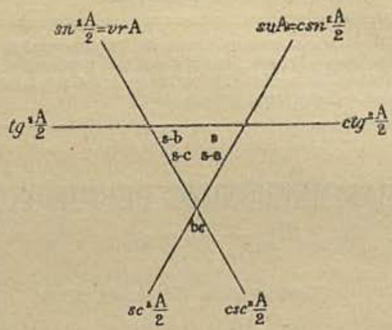
Biblioteca Nacional de España

VI

Resolución de triángulos rectilíneo-oblicuángulos

Para resolver los triángulos rectilíneos oblicuángulos, en el caso de que sean conocidos los tres lados, proponemos el

Diagrama 10



formado con los lados b, c, del triángulo, con la semisuma s de los tres lados, y con las diferencias $s-a$, $s-b$, $s-c$ entre la semisuma indicada y cada uno de los lados a, b, c. De él se derivan las expresiones trigonométricas usuales del cuadrado de la mitad de un ángulo A, y las especiales de Mendoza, que dan el valor directo del ángulo entero.

Aplicando la regla primera, establecida para los triángulos rectilíneo-rectángulos, obtendremos

$$151)\quad vr\,A = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$152)\quad sn^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \qquad 153)\quad sn\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$154)\quad tg^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \qquad 155)\quad tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Biblioteca Nacional de España

156) $sc^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{bc}{s(s-a)}$ 157) $sc \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{bc}{s(s-a)}}$

158) $sv\,A = \dfrac{s(s-a)}{bc}$

159) $csn^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{s(s-a)}{bc}$ 160) $csn \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

161) $ctg^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$ 162) $ctg \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$

163) $csc^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{bc}{(s-b)(s-c)}$ 164) $csc \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{bc}{(s-b)(s-c)}}$

Mediante una evolución circular entre las letras a, b, c se encuentran las fórmulas correspondientes al ángulo B

165) $vr\,B = \dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}$

166) $sn^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}$ 167) $sn \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

168) $tg^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}$ 169) $tg \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

170) $sc^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{ac}{s(s-b)}$ 171) $sc \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{ac}{s(s-b)}}$

172) $sv\,B = \dfrac{s(s-b)}{ac}$

173) $csn^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{s(s-b)}{ac}$ 174) $csn \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}$

Biblioteca Nacional de España

175) $ctg^2 \frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}$ 176) $ctg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-b)}}$

177) $csc^2 \frac{B}{2} = \frac{a\,c}{(s-a)(s-c)}$ 178) $csc \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a\,c}{(s-a)(s-c)}}$

Por nueva evolución circular entre las letras a, b, c se hallan las fórmulas correspondientes al ángulo C

179) $vr\ C = \frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}$

180) $sn^2 \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}$ 181) $sn \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{a\,b}}$

182) $tg^2 \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$ 183) $tg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

184) $sc^2 \frac{C}{2} = \frac{a\,b}{s(s-c)}$ 185) $sc \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a\,b}{s(s-c)}}$

186) $sv\ C = \frac{s(s-c)}{a\,b}$

187) $csn^2 \frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{a\,b}$ 188) $csn \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{a\,b}}$

189) $ctg^2 \frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}$ 190) $ctg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$

191) $csc^2 \frac{C}{2} = \frac{a\,b}{(s-a)(s-b)}$ 192) $csc \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a\,b}{(s-a)(s-b)}}$

(Se continuará.)

Biblioteca Nacional de España

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 50)

Se tiene pues

$$\text{Arg}\,\text{Ch}\,x = \pm l(x+\sqrt{x^2-1}), \qquad \text{Arg}\,\text{Sh}\,y = l(y+\sqrt{1+y^2}),$$

$$\text{Arg Th } z = l\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Encuéntrase igualmente para las funciones inversas de $X = \text{Sech } t$, $Y = \text{Cosech } t$, $Z = \text{Coth } t$,

$$\text{Arg Sech X} = \pm l\left(\frac{1+\sqrt{1-X^2}}{X}\right),$$

$$\text{Arg Cosech Y} = l\left(\frac{1+\sqrt{1+Y^2}}{Y}\right),$$

$$\text{Arg Coth Z} = l\sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}.$$

Estas notaciones pueden servir para hacer resaltar, en el cálculo integral, las analogias de ciertas fórmulas que contienen funciones hiperbólicas inversas con las que contienen funciones circulares inversas.

11. *Notaciones alemanas.* En Alemania las funciones *circulares*, directas é inversas, se designan como en Italia y Francia, es decir, *por medio de letras romanas.*

Las funciones hiperbólicas se representan como las funciones circulares, *pero por medio de letras góticas.* Así, en lugar de

$$\text{Sh } t, \qquad \text{Arg Sh } y$$

Gudermann et M. Günther escriben

$$\mathfrak{Sin}\ t, \quad \mathfrak{Arcsin}\ t,$$

notaciones que se leen *seno gótico* y *arcoseno gótico*, y que son menos expresivas y menos fáciles de transcribir que las de Riccati y Hoüel.

Biblioteca Nacional de España

II. Interpretación geométrica

12. *Funciones circulares.* En la ecuación del círculo de radio igual á la unidad, $x^2 + y^2 = 1$, pongamos

$$y = \text{sen}\ \theta,$$

para un punto cualquiera m, siendo θ una variable auxiliar, y se tendrá

$$x = \cos\theta.$$

La tangente en el punto m, cuya ecuación es $Xx + Yy = 1$, tiene por coordenadas en el origen

$$X = \frac{1}{x} = \sec\theta, \quad Y = \frac{1}{y} = \text{cosec}\ \theta.$$

En el caso de la figura, $\sec\theta = Os$ y $\text{cosec}\ \theta = Os'$; pero la demostración precedente prueba que las coordenadas en el origen, de la tangente en el punto considerado, representan siempre, en magnitud y en signo, $\sec\theta$, $\text{cosec}\ \theta$, siendo θ el valor de la variable auxiliar en este punto.

El radio vector Om, cuya ecuación es $Y = \frac{y}{x} X$, encuentra á las paralelas á los ejes, trazadas por A y B á una distancia de O igual á la unidad, en puntos t y t', que tienen, el primero $\text{tang}\ \theta$ por ordenada, y el segundo $\cot\theta$ por abscisa.

La variable auxiliar θ es la medida del arco Am, tomado con signo conveniente, ó la del doble del sector OAm tomado con el mismo signo.

Si se conocen los valores θ_1, θ_2 de la variable θ correspondientes á dos puntos m_1, m_2 (no indicados en la figura), el punto m_3 que corresponde á $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, se encuentra en la intersección del círculo con el radio que pasa por el punto medio de la cuerda $m_1 m_2$. Esta recta pasa además por el punto de intersección de las tangentes en m_1 y m_2.

13. *Funciones hiperbólicas.* En la ecuación de la hipér-

Biblioteca Nacional de España

bola equilátera de semi-eje transverso igual á la unidad, $x^2-y^2=1$, pongamos

$$y=\mathrm{Sh}\,t.$$

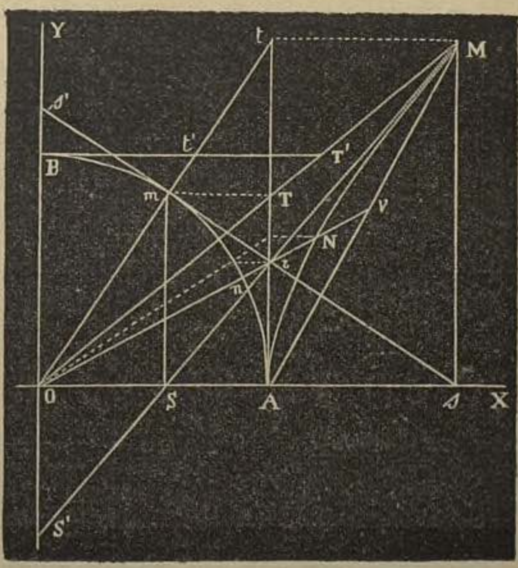
Se tendrá evidentemente, para la rama de hipérbola de abscisas positivas,

$$x=\mathrm{Ch}\,t.$$

La tangente en el punto M, cuyas coordenadas son Ch t, Sh t (ó, más sencillamente, en el punto M, cuyo parámetro es t), tiene por ecuación $\mathrm{X}x-\mathrm{Y}y=1$. Esta tangente tiene por coordenadas en el origen

$$\mathrm{X}=\frac{1}{x}=\mathrm{Sch}\,t,\qquad \mathrm{Y}=-\frac{1}{y}=-\mathrm{Cosech}\,t.$$

En el caso de la figura, Sech $t=\mathrm{OS}$, Cosech $t=-\mathrm{OS}'$; pero la demostración precedente es general: la secante hiperbólica de t es la abscisa en el origen, la cosecante hiperbólica, la ordenada en el origen, *tomada negativamente*, de la



tangente á la hipérbola representada por $x=\mathrm{Ch}\,t$, $y=\mathrm{Sh}\,t$, en el punto de parámetro t.

Biblioteca Nacional de España

El radio vector OM, cuya ecuación es $Y = \frac{y}{x} X$, encuentra á las paralelas á los ejes trazadas por A y B, en puntos T y T′, que tienen, el primero, Th t por ordenada, y el segundo, Coth t por abscisa.

Si t_1 y t_2 son los parámetros de dos puntos, M_1 M_2, las coordenadas del punto medio M_4 de la cuerda M_1 M_2, serán

$$\frac{\operatorname{Ch} t_1 + \operatorname{Ch} t_2}{2}, \qquad \frac{\operatorname{Sh} t_1 + \operatorname{Sh} t_2}{2}.$$

La recta que une este punto con el origen tiene por ecuación

$$y = \frac{\operatorname{Sh} t_1 + \operatorname{Sh} t_2}{\operatorname{Ch} t_1 + \operatorname{Ch} t_2} x \qquad \text{ó} \qquad y = x \operatorname{Th} \frac{1}{2}(t_1 + t_2);$$

y corta á la hipérbola en un punto M_3 cuyas coordenadas son

$$x = \operatorname{Ch} \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \qquad y = \operatorname{Sh}(t_1 + t_2),$$

ó cuyo parámetro es $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Sábese además, por la teoría de los diámetros y es fácil de verificar directamente, que OM_3 pasa por el punto de encuentro de las tangentes en M_1 y M_2 (1).

Por la extremidad positiva del eje OA tracemos una paralela á la cuerda M_1M_2, que encuentra á la curva en un punto M_5 de parámetro t_5, y al diámetro OM_4 en M_6 (2). Según lo que se acaba de ver, t_3, parámetro de M_3, intersección de

(1) De los triángulos equivalentes OM_1M_4, OM_2M_4, restemos los trapecios equivalentes que tienen por lados paralelos las semi-cuerdas de la hipérbola, en número indefinidamente creciente, que son paralelas á M_1M_2 y están divididas en partes iguales por OM_3. Encontraremos que el área del sector hiperbólico OM_1M_3 es igual á la del sector hiperbólico OM_2M_3; dicho de otro modo, OM_3 divide al sector OM_1M_2 en dos partes iguales, lo que resulta también del número siguiente.

(2) El lector puede trazar la figura. La construcción análoga en el círculo es demasiado sencilla para que necesite ser expuesta explícitamente.

Biblioteca Nacional de España

OM_6 con la curva, será igual á la semi-suma $\frac{1}{2}t_5$ de los parámetros de A y M_5. Luego $t_5 = t_1 + t_2$. El punto M_5 está además evidentemente sobre la paralela á OM_4 trazada por la segunda extremidad A′ del eje OA. Es pues fácil construir el punto M_5 correspondiente á $t_1 + t_2$, cuando se conocen los puntos M_1, M_2, correspondientes á t_1, t_2.

14. *Continuación. Interpretación geométrica de t.* Consideremos un sector hiperbólico OAM, cuya extremidad M tenga por parámetro t. Fácil será, según el número precedente, construir los puntos que tengan por parámetros $\frac{1}{2}t$; $\frac{1}{4}t$, $\frac{3}{4}t$; $\frac{1}{8}t$, $\frac{3}{8}t$, $\frac{5}{8}t$, $\frac{7}{8}t$, y así sucesivamente. Sean $n = 2^k$, $n\beta = t$, y llamemos 1, 2, 3, . . . , $(n-1)$ los puntos cuyos parámetros sean $\beta, 2\beta, 3\beta, \ldots, (n-1)\beta$. Los triángulos OA1, O12, O23, . . . son equivalentes como se sabe. Por otra parte, el área del triángulo cuyos vértices tienen por coordenadas

$$(0, 0), \quad [\mathrm{Ch}\,(p-1)\,\beta,\ \mathrm{Sh}\,(p-1)\,\beta], \quad [\mathrm{Ch}\,p\beta,\ \mathrm{Sh}\,p\beta],$$

es, según una fórmula conocida,

$$\frac{1}{2}\,[\mathrm{Sh}\,p\beta\ \mathrm{Ch}\,(p-1)\,\beta - \mathrm{Sh}\,(p-1)\,\beta\ \mathrm{Ch}\,p\beta] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,\beta.$$

Según esto

$$\text{Polígono OA123...M} = \frac{n}{2}\,\mathrm{Sh}\,\beta = \frac{n\beta}{2}\,\frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta} = \frac{1}{2}\,t \times \frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta};$$

de donde, pasando al límite,

$$\text{Sect. hip. OAM} = \frac{1}{2}\,t \times \lim \frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta}.$$

Pero, según la tercera definición del número e, dada al principio de este trabajo, se tiene, poniendo $2\beta = \alpha$,

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta} = \mathrm{Lim}\,\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2\beta} = \mathrm{Lim}\,\frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta} \cdot \frac{1}{e^{\beta}} =$$

$$= \mathrm{Lim}\,\frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \mathrm{Lim}\,\frac{1}{e^{\beta}} = 1 \times 1 = 1.$$

*

Biblioteca Nacional de España

Se tiene pues finalmente

$$\text{Sect. hip. OAM} = \frac{1}{2}\, t,$$

es decir, que t es el doble del sector hiperbólico OAM, como θ es el doble del sector circular OAm.

15. *Relaciones entre las funciones hiperbólicas y las circulares.*

I. Para simplificar consideremos solamente los puntos de la hipérbola y del círculo, cuyas dos coordenadas son positivas. Por el pie s de la ordenada Ms del punto M de parámetro t, tracemos la tangente sms' al círculo. Se tendrá Om = Os cos(ángulo AOm), ó

$$1 = \text{Ch}\,t \cos\,(\text{ángulo AOM}).$$

El ángulo AOM, ó 2 veces el sector OAM, será pues la variable θ, ligada al doble sector t = 2OAM, por la relación (1) del nº 8.

Las relaciones (2) del nº 8 corresponden por tanto á las propiedades geométricas siguientes:

Puesto que Sech $t = \cos\theta$, la tangente en M á la hipérbola, pasa por el pie S de la ordenada del punto m del circulo. A causa de Sh $t = \text{tang}\,\theta$, Th $t = \text{sen}\,\theta$, se tiene en consecuencia

$$s\text{M} = \text{A}t, \quad \text{AT} = \text{S}m;$$

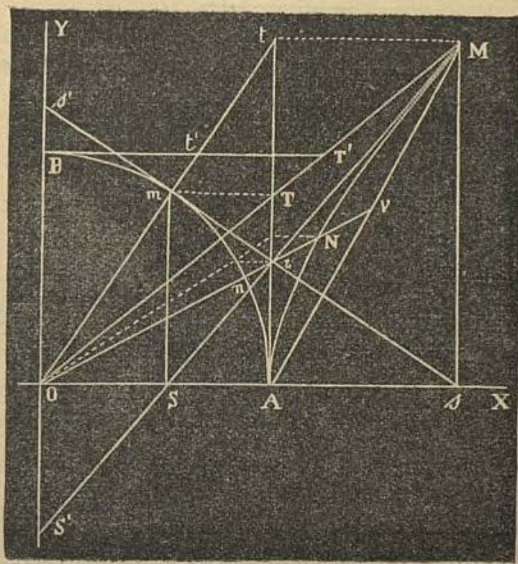
$$\text{BT}' = \text{Coth}\,t = \text{cosec}\,\theta = \text{O}s\,;$$

$$\text{OS}' = \text{Cosech}\,t = \cot\theta = \text{B}t'.$$

II. La recta Oν, que une el punto medio ν de AM á O pasa por el punto N de la hipérbola de parámetro $\frac{1}{2}t$ y por el punto τ de intersección de las tangentes AT, Ms. Luego, Aτ = Th $\frac{1}{2}t$. Según el teorema de Laisant, Th $\frac{1}{2}t = \text{tang}\,\frac{1}{2}\theta$.

Biblioteca Nacional de España

Por consiguiente, $O\nu$ pasa también por el punto medio n del arco Am y la tangente ms al círculo pasa igualmente por τ.



Es fácil, según ésto, construir el punto N, sin que esté trazada la hipérbola, por uno de los procedimientos que permiten deducir de un punto de una de las dos curvas, el punto correspondiente de la otra. Recíprocamente, dado el punto N de parámetro $\frac{1}{2}t$, puédese también deducir de él el punto M de parámetro t, buscando primero el punto auxiliar n y después el punto m.

(Se continuará.)

Biblioteca Nacional de España

MÉTODOS GRÁFICOS RELATIVOS Á LAS LENTES [1]

Acaso ofrezcan interés los siguientes métodos que se fundan en sencillas construcciones geométricas y que no sabemos hayan sido publicados.

Sean (fig. 1) AB y CD dos rectas paralelas, sea E el

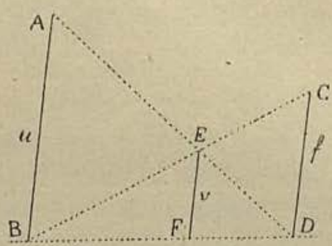


Figura 1.

punto de intersección de AD con BC, y trácese EF, paralela á los dos primeros, hasta encontrar en F á la recta BD.

Dará EF en los dos triángulos ABD y BCD estas relaciones:

$$\frac{BF}{BD} = 1 - \frac{EF}{AB}, \qquad \frac{BF}{BD} = \frac{EF}{CD},$$

de donde se infiere

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

Tal propiedad suministra un método gráfico para enlazar el valor recíproco de la distancia focal *f* de una lente con los valores recíprocos de las distancias *u*, *v* del objeto y de su imagen á la misma lente, pues contadas tales distancias desde el centro óptico ó punto nodal, y reputadas como positivas cuando se cuenten en sentido contrario al de los rayos

(1) Traducido del *Philosophical Magazine*, Marzo 1896, pág. 216.

Biblioteca Nacional de España

incidentes y como negativas cuando se cuenten en el mismo sentido, la fórmula es

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{f}.$$

Luego si dadas u, f, se pide v, trazaremos á escala, para representar aquéllas, las dos paralelas AB y CD, y completada la figura, EF representará v. Y si dadas u, v, se quiere f, señalaremos los datos con dos paralelas proporcionadas AB y EF, y terminada la figura, será CD la distancia focal. Los valores negativos de u, v, f, quedarán indicados por líneas trazadas por debajo de BD.

El dibujo antedicho muestra también las magnitudes relativas de la imagen y del objeto; pues la relación de esas magnitudes es la misma de $v : u$, esto es, EF : AB, y la imagen será directa ó inversa según que EF y AB estén ó no á un mismo lado de BD.

Sirve también esa figura para hallar la distancia focal de la lente que equivale á dos ó más, puestas en contacto, como se hace para lograr el acromatismo; porque el valor recíproco de esa distancia focal, es la suma de los valores recíprocos de las distancias focales de las lentes componentes.

En el caso de dos lentes separadas por un intervalo a, bastante pequeño con relación á las distancias focales f_1 y f_2 de éstas, para que el cuadrado de a se desdeñe, se puede asimismo, ampliando la indicada construcción, hallar la distancia focal de la lente única, equivalente á ambas, y las distancias de su centro óptico á los de las lentes dadas.

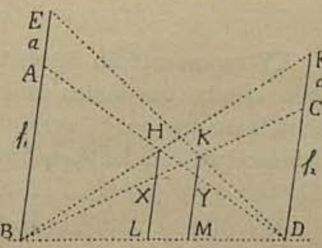


Figura 2.

En efecto, sean (fig. 2), AB y CD dos rectas paralelas que representen f_1 y f_2: prolónguense éstas dos rectas hasta

Biblioteca Nacional de España

E y F de manera que AE = CF = a; señálese el punto H en que se cortan AD y BF, y el punto K de intersección de BC con ED; trácense HL y KM, paralelas á AB y CD, hasta encontrar BD en L y M, y márquense los puntos X, Y, de intersección de HL y KM con BC y AD. Se tendrán las relaciones

$$\frac{1}{HL} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{a + f_2}, \qquad \frac{HX}{HL} = \frac{a}{a + f_2},$$

$$\frac{1}{KM} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{a + f_1}, \qquad \frac{KY}{KM} = \frac{a}{a + f_1}.$$

Por consiguiente

$$HX = \frac{a\, f_1}{a + f_1 + f_2}, \qquad KY = \frac{a\, f_2}{a + f_1 + f_2};$$

y puesto que

$$XL = HL - HK, \qquad YM = KM - KY,$$

será

$$XL = \frac{f_1\, f_2}{a + f_1 + f_2} = YM.$$

Luego — HX y KY representarán las distancias á que de los dos centros ópticos de las dos lentes dadas se encontrará el centro óptico de la lente que puede reemplazarlas, y XL ó YM será la distancia focal de esta lente equivalente.

R. S. Cole,
Doctor en Filosofía.

Devonport (Inglaterra).

Biblioteca Nacional de España

CURIOSIDADES

Eclipses de sol.—Cuando la luna nueva se halla de la línea de los nodos á distancia comprendida entre $13^\circ\ 30'$ y $19^\circ\ 40'$, pueden acontecer eclipses de sol; y acontecen con seguridad cuando esa distancia no supera á $13^\circ\ 30'$. Pero una lunación, ó intervalo entre dos lunas nuevas, es de $29^{\text{días}}531$ y el período de la revolución sinódica de los nodos, es decir, de la revolución de éstos, contada desde la línea que une la tierra con el sol, es de $346^{\text{días}}608$. Convertida en fracción continua la razón de este número al de la lunación, resulta

$$11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}$$

cuya cuarta y quinta reducida son $\frac{47}{4}$ y $\frac{223}{119}$. Luego, al cabo de 47 meses lunares, las cosas vuelven á estar casi como estaban, y al cabo de 223 meses lunares ocurre ésto con mayor aproximación todavía.

Fué conocido este último período desde la más romota antigüedad con el nombre de *saros* por los pastores caldeos,

Biblioteca Nacional de España

los cuales, guiándose por él, predecían la serie de los varios eclipses que en cada período acontecerían. Equivale á 18 años y 10 ú 11 días, y no carece de utilidad para los modernos astrónomos, pues advertidos por él de que ciertas conjunciones envuelven posibilidad de eclipse, pueden preparar para ellas los cálculos necesarios.

El otro período de 47 lunaciones equivale á 1388 días, y multiplicado por 5 da el período de 19 años, que se repite renovando las fases de la luna en las mismas fechas relativas. Es este período de 19 años el célebre *ciclo de Metón*, revelado á los antiguos griegos en los juegos olímpicos del año 433 anterior á nuestra Era, y con tanto júbilo acogido, que los griegos acordaron grabar en monumentos públicos con cifras de oro las fechas comprendidas en ese ciclo descubierto por Metón.

Reformas del calendario.—La duración del año trópico medio, esto es, la duración que tendría el año trópico, si el equinoccio variara sólo en virtud de la precesión, es de $365^{\text{días}}242256$. Mas convertida en fracción continua la fracción decimal que sigue á los $365^{\text{días}}$, equivale á

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}$$

Biblioteca Nacional de España

cuyas fracciones convergentes sucesivas son

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{39}{161}, \frac{47}{194}, \ldots$$

La reforma del calendario romano, que, á partir del año 46 anterior á nuestra Era—ó el año 708 de la fundación de Roma—decretó Julio César, adopta, siguiendo el dictamen dado por Sosígenes, astrónomo de Alejandría, la fracción $\frac{1}{4}$ y, de acuerdo con ella, establece que de cada cuatro años, tres sean comunes ó de 365 días, y el cuarto, bisiesto ó de 366 días. Pero tal fracción es excesiva, y al cabo de 4 siglos, asciende el error á 3 días.

La reforma del calendario persa que en el siglo XI de nuestra Era—por el año 1079 —fué decretada por Gelal-Eddin Malech Shah, sultán de Khorasán, es celebrada por su exactitud, pues combina la fracción $\frac{7}{29}$ con la $\frac{8}{33}$, propuesta, según se cree, por Omar Cheyam, uno de los ocho astrónomos nombrados por dicho soberano para entender en la corrección del referido calendario.

No menos digna de elogio es la reforma del calendario juliano que en 1582 decretó el Papa Gregorio XIII, de conformidad con lo propuesto por Luis Lilio Gheraldi, médico y astrónomo de Nápoles, y coordinado por el jesuita P. Cristóbal Clavio en lo concerniente á las fiestas religiosas. Combina esta corrección las dos fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{47}{194}$, triplicando los dos términos de la primera, duplicando los dos de la última y sumando los productos correlativos, con lo cual resulta la fracción $\frac{97}{400}$, que da 97 años bisiestos en 400 años, en vez de 100 que daba la fracción $\frac{1}{4}$, en la cual se basaba el calendario juliano. Rebájanse de 400 años, 3 bisiestos, periódicamente y de un modo sencillo, conservando como general la

Biblioteca Nacional de España

regla de un bisiesto por cada 4 años y poniéndole sólo como excepción que los años que redondean siglos, no sean bisiestos si el número de siglos, es decir, el de centenas, no es divisible por 4: así 1900 no será año bisiesto. El error con el calendario así dispuesto no asciende á 1 día sino al cabo de unos 40 siglos transcurridos desde que comenzó á regir.

Pasos del planeta Venus.—Cuando en su conjunción inferior se halla Venus cerca de un nodo de su órbita, se ve pasar el planeta, como una mancha negra, por el disco del sol. Pero la cuerda que parece recorrer sobre este disco es distinta, según el lugar desde donde el paso se observa; y de tal diferencia puede deducirse con bastante precisión la distancia de la tierra al sol, como indicó Halley en 1716 al anunciar el paso de 1761. Mas este fenómeno no acontece á menudo. Las revoluciones sidéreas de Venus y de la tierra son respectivamente de $224^{días}700$ y $365^{días}256$, y la fracción continua que expresa el cociente del primer número por el segundo, es

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{29+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}}}$$

Biblioteca Nacional de España

cuya quinta reducida vale $\frac{8}{13}$ y la sexta $\frac{235}{382}$. Como es pequeña la fracción $\frac{1}{29}$, esa quinta reducida da un valor bastante cercano á la verdad, es decir, que 13 revoluciones sidéreas de Venus y 8 años muy poco discrepan de ser iguales. Por eso, no lejos de cada nodo, acontecen dos pasos—uno antes y otro después de llegar el planeta al nodo—entre los cuales media un intervalo de 8 años. Pero hasta otro paso han de transcurrir luego $105\frac{1}{2}$ años ó $121\frac{1}{2}$ años, según haya de acaecer cerca del modo ascendente ó cerca del descendente. La suma de estos tres intervalos $105\frac{1}{2} + 8 + 121\frac{1}{2}$ da el numerador de la sexta reducida, es decir, los 235 años que median entre un paso posterior á un nodo y el siguiente paso anterior al mismo nodo. Por el adjunto cuadro se comprenderá mejor la ley seguida en la repetición del fenómeno.

PASO DE VENUS

Cerca del nodo ascendente.	Cerca del nodo descendente.
1639. . . . . 4 Diciembre.	. . . .
. . . .	1761. . . . . 5 Junio.
. . . .	1769. . . . . 3 Junio.
1874. . . . . 8 Diciembre.	. . . .
1882. . . . . 6 Diciembre.	. . . .
. . . .	2004. . . . . 7 Junio.
. . . .	2012. . . . . 5 Junio.

Biblioteca Nacional de España

CUESTIONES PROPUESTAS

29. Hallar el lugar geométrico de los focos de las cónicas inscriptas en un cuadrilátero.

30. Hallar el número de términos de una continuante de n^{mo} orden.

31. Demostrar que las coordenadas baricéntricas homogéneas de una recta son proporcionales á las distancias á que están de la recta los vértices del triángulo de referencia.

32. Demostrar que las rectas de una congruencia lineal, que encuentran á una recta arbitraria, forman una superficie de segundo grado.

33. Hallar una fórmula, función de n, que exprese el número de domingos que caen en día 20 de mes, en n años.

34. Varias familias de distinto apellido se convienen en que sus individuos y descendientes se casen sólo con individuos ó descendientes de las mismas. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrán reducido á uno sólo los distintos apellidos á causa de los casamientos? Tómense á arbitrio los números y promedios que deben figurar en la cuestión.

35. ¿Cuál debe ser el último número de la primera línea horizontal de una tabla pitagórica, para que la suma de todos los números, que compongan esta tabla, sea igual á 36100?

36. Repartir los nueve números dígitos en el perímetro de un triángulo, de modo que, situado uno en cada vértice y cuatro en cada lado, sea la misma en los tres lados la suma de cuadrados de los números correspondientes.

37. Demostrar que la suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado.

38. Demostrar que si se divide un cuadrilátero en dos por una recta, los puntos de intersección de las diagonales de los tres cuadriláteros están en línea recta.

39. Demostrar, sin valerse de la Geometría analítica, que dos triángulos polares recíprocos son homológicos.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.

Biblioteca Nacional de España