ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 10 OCTUBRE 1896

SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó. (*Continuación.*)—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansion. (*Continuación.*)—Nota sobre las aproximaciones en el cálculo logarítmico, por Vladislao Puchewicz.—Cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

(*Continuación.* Véase pág. 169)

IX

Analogías de Neper

Para recordar las analogías de Neper, ó sea las fórmulas que relacionan cinco á cinco los elementos del triángulo esférico oblicuángulo, proponemos el

Diagrama 20

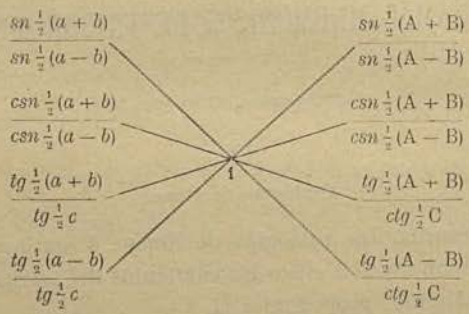
$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}c} & & \dfrac{sn\,\frac{1}{2}(A+B)}{sn\,\frac{1}{2}(A-B)} \\
 & 1 & \\
\dfrac{tg\,\frac{1}{2}(a-b)}{tg\,\frac{1}{2}c} & & \dfrac{csn\,\frac{1}{2}(A+B)}{csn\,\frac{1}{2}(A-B)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{ctg\,\frac{1}{2}C} & & \dfrac{sn\,\frac{1}{2}(a+b)}{sn\,\frac{1}{2}(a-b)} \\
 & 1 & \\
\dfrac{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}{ctg\,\frac{1}{2}C} & & \dfrac{csn\,\frac{1}{2}(a+b)}{csn\,\frac{1}{2}(a-b)}
\end{array}$$

que consta de dos partes, muy semejantes al diagrama 11, formada la primera con las tangentes de la semisuma y de la semidiferencia de dos lados, divididas por la tangente de la mitad del tercer lado, y con el seno y el coseno de la semisuma de los ángulos opuestos, respectivamente divididos por el seno y el coseno de la semidiferencia de los mismos; y constituída la segunda con las tangentes de la semisuma y de la semidiferencia de dos ángulos, divididas por la cotangente de la mitad del tercer ángulo, y con el seno y el coseno de la semisuma de los lados opuestos, respectivamente divididos por el seno y el coseno de la semidiferencia de los mismos.

Las dos partes del diagrama 20 están reunidas en el

Diagrama 21



que ofrece la ventaja de presentar en orden natural los números trigonométricos de los elementos lineales y angulares del triángulo.

De uno ú otro diagrama se derivan las relaciones ó analogías de Neper mediante la siguiente regla, idéntica á la correspondiente al diagrama 11.

Una expresión cualquiera del diagrama es igual al cociente de las dos que le son consecutivas en su recta, ó bien *un extremo cualquiera del diagrama es igual al recíproco del otro extremo de la misma recta.*

Aplicando esta regla obtendremos, del diagrama 20,

$$597)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}\,c} = \frac{csn\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{csn\,\frac{1}{2}\,(A+B)}$$

$$598)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)}{tg\,\frac{1}{2}\,c} = \frac{sn\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{sn\,\frac{1}{2}\,(A+B)}$$

$$599)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A+B)}{ctg\,\frac{1}{2}\,C} = \frac{csn\,\frac{1}{2}\,(a-b)}{csn\,\frac{1}{2}\,(a+b)}$$

$$600)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{ctg\,\frac{1}{2}\,C} = \frac{sn\,\frac{1}{2}\,(a-b)}{sn\,\frac{1}{2}\,(a+b)}$$

y del diagrama 21

$$600)\quad \frac{sn\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{sn\,\frac{1}{2}\,(a-b)} = \frac{ctg\,\frac{1}{2}\,C}{tg\,\frac{1}{2}\,(A-B)}$$

$$599)\quad \frac{csn\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{csn\,\frac{1}{2}\,(a-b)} = \frac{ctg\,\frac{1}{2}\,C}{tg\,\frac{1}{2}\,(A+B)}$$

$$597)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}\,c} = \frac{csn\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{csn\,\frac{1}{2}\,(A+B)}$$

$$598)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)}{tg\,\frac{1}{2}\,c} = \frac{sn\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{sn\,\frac{1}{2}\,(A+B)}$$

Estos resultados admiten entre otras las siguientes formas:

601) $$\frac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}c}=\frac{sc\,\frac{1}{2}(A+B)}{sc\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

602) $$\frac{tg\,\frac{1}{2}(a-b)}{tg\,\frac{1}{2}c}=\frac{csc\,\frac{1}{2}(A+B)}{csc\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

603) $$\frac{sc\,\frac{1}{2}(a+b)}{sc\,\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{ctg\,\frac{1}{2}C}$$

604) $$\frac{csc\,\frac{1}{2}(a+b)}{csc\,\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}{ctg\,\frac{1}{2}C}$$

---

605) $$\frac{sn\,\frac{1}{2}(a+b)}{sn\,\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{tg\,\frac{1}{2}(90^\circ-C)}{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

606) $$\frac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}c}=\frac{sc\,\frac{1}{2}(A+B)}{sc\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

607) $$\frac{tg\,\frac{1}{2}(a-b)}{tg\,\frac{1}{2}c}=\frac{sn\,\frac{1}{2}(A-B)}{sn\,\frac{1}{2}(A+B)}$$

608) $$\frac{sc\,\frac{1}{2}(a+b)}{sc\,\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}(90^\circ-C)}$$

---

609) $$\frac{csn \frac{1}{2}(a+b)}{csn \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{ctg \frac{1}{2}(A+B)}{ctg \frac{1}{2}(90^o - C)}$$

610) $$\frac{ctg \frac{1}{2}(a+b)}{ctg \frac{1}{2} c} = \frac{csn \frac{1}{2}(A+B)}{csn \frac{1}{2}(A-B)}$$

611) $$\frac{ctg \frac{1}{2}(a-b)}{ctg \frac{1}{2} c} = \frac{csc \frac{1}{2}(A-B)}{csc \frac{1}{2}(A+B)}$$

612) $$\frac{csc \frac{1}{2}(a+b)}{csc \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{ctg \frac{1}{2}(90^o - C)}{ctg \frac{1}{2}(A-B)}$$

---

613) $$\frac{sn \frac{1}{2}(a-b)}{sn \frac{1}{2}(a+b)} = tg \frac{1}{2}(A-B)\, tg \frac{1}{2} C$$

614) $$\frac{csn \frac{1}{2}(a-b)}{csn \frac{1}{2}(a+b)} = tg \frac{1}{2}(A+B)\, tg \frac{1}{2} C$$

615) $$\frac{sn \frac{1}{2}(A-B)}{sn \frac{1}{2}(A+B)} = tg \frac{1}{2}(a-b)\, ctg \frac{1}{2} c$$

616) $$\frac{csn \frac{1}{2}(A-B)}{csn \frac{1}{2}(A+B)} = tg \frac{1}{2}(a+b)\, ctg \frac{1}{2} c$$

---

617) $$\frac{sc\,\frac{1}{2}(a+b)}{sc\,\frac{1}{2}(a-b)} = tg\,\frac{1}{2}(A+B)\,tg\,\frac{1}{2}\,C$$

618) $$\frac{csc\,\frac{1}{2}(a+b)}{csc\,\frac{1}{2}(a-b)} = tg\,\frac{1}{2}(A-B)\,tg\,\frac{1}{2}\,C$$

619) $$\frac{sc\,\frac{1}{2}(A+B)}{sc\,\frac{1}{2}(A-B)} = tg\,\frac{1}{2}(a+b)\,ctg\,\frac{1}{2}\,c$$

620) $$\frac{csc\,\frac{1}{2}(A+B)}{csc\,\frac{1}{2}(A-B)} = tg\,\frac{1}{2}(a-b)\,ctg\,\frac{1}{2}\,c$$

---

621) $$sn\,\frac{a+b}{2}\,tg\,\frac{A-B}{2} = sn\,\frac{a-b}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

622) $$csn\,\frac{a+b}{2}\,tg\,\frac{A+B}{2} = csn\,\frac{a-b}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

623) $$sn\,\frac{A+B}{2}\,tg\,\frac{a-b}{2} = sn\,\frac{A-B}{2}\,tg\,\frac{c}{2}$$

624) $$csn\,\frac{A+B}{2}\,tg\,\frac{a+b}{2} = csn\,\frac{A-B}{2}\,tg\,\frac{c}{2}$$

---

625) $$tg\,\frac{a+b}{2}\,sc\,\frac{A-B}{2} = sc\,\frac{A+B}{2}\,tg\,\frac{c}{2}$$

626) $$tg\,\frac{a-b}{2}\,csc\,\frac{A-B}{2} = csc\,\frac{A+B}{2}\,tg\,\frac{c}{2}$$

627) $$tg\,\frac{A+B}{2}\,sc\,\frac{a-b}{2} = sc\,\frac{a+b}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

628) $$tg\,\frac{A-B}{2}\,csc\,\frac{a-b}{2} = csc\,\frac{a+b}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

$$629)\quad sn\,\frac{a+b}{2}\,csc\,\frac{a-b}{2}=ctg\,\frac{A-B}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

$$630)\quad csn\,\frac{a+b}{2}\,sc\,\frac{a-b}{2}=ctg\,\frac{A+B}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

$$631)\quad sn\,\frac{A+B}{2}\,csc\,\frac{A-B}{2}=ctg\,\frac{a-b}{2}\,tg\,\frac{c}{2}$$

$$632)\quad csn\,\frac{A+B}{2}\,sc\,\frac{A-B}{2}=ctg\,\frac{a+b}{2}\,tg\,\frac{c}{2}$$

$$633)\quad sc\,\frac{a+b}{2}\,csn\,\frac{a-b}{2}=tg\,\frac{A+B}{2}\,tg\,\frac{C}{2}$$

$$634)\quad csc\,\frac{a+b}{2}\,sn\,\frac{a-b}{2}=tg\,\frac{A-B}{2}\,tg\,\frac{C}{2}$$

$$635)\quad sc\,\frac{A+B}{2}\,csn\,\frac{A-B}{2}=tg\,\frac{a+b}{2}\,ctg\,\frac{c}{2}$$

$$636)\quad csc\,\frac{A+B}{2}\,sn\,\frac{A-B}{2}=tg\,\frac{a-b}{2}\,ctg\,\frac{c}{2}$$

Las cuatro analogías fundamentales (597, 598, 599 y 600) pueden condensarse en las dos fórmulas siguientes:

$$637)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a\pm b)}{tg\,\frac{1}{2}\,c}=\frac{\begin{Bmatrix}csn\\ sn\end{Bmatrix}\frac{1}{2}\,(A-B)}{\begin{Bmatrix}csn\\ sn\end{Bmatrix}\frac{1}{2}\,(A+B)}$$

$$638)\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A\pm B)}{ctg\,\frac{1}{2}\,C}=\frac{\begin{Bmatrix}csn\\ sn\end{Bmatrix}\frac{1}{2}\,(a-b)}{\begin{Bmatrix}csn\\ sn\end{Bmatrix}\frac{1}{2}\,(a+b)}$$

Para el cálculo simultáneo de dos ángulos A, B, de un triángulo esférico oblicuángulo, en función de los lados opuestos a, b, y del ángulo C comprendido por éstos, pueden emplearse las siguientes fórmulas, tomando una cualquiera de las correspondientes á la semisuma de los ángulos buscados, con otra cualquiera de las que corresponden á la semidiferencia de los mismos.

639) $$tg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = ctg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{sc\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{sc\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}-\mathrm{b})}$$

640) $$tg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = ctg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{csn\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{csn\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$$

641) $$tg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = ctg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,sc\,\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\,csn\,\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}$$

642) $$ctg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = tg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{sc\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{sc\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$$

643) $$ctg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = tg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{csn\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{csn\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}-\mathrm{b})}$$

644) $$ctg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = tg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,csn\,\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\,sc\,\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}$$

---

645) $$tg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = ctg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{sn\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{sn\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$$

646) $$tg\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = ctg\,\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{csc\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{csc\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{a}-b)}$$

$$647)\quad tg\,\frac{1}{2}(A-B)=ctg\,\frac{1}{2}\,C\,csc\,\frac{a+b}{2}\,sn\,\frac{a-b}{2}$$

$$648)\quad ctg\,\frac{1}{2}(A-B)=tg\,\frac{1}{2}\,C\,\frac{sn\,\frac{1}{2}(a+b)}{sn\,\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$649)\quad ctg\,\frac{1}{2}(A-B)=tg\,\frac{1}{2}\,C\,\frac{csc\,\frac{1}{2}(a-b)}{csc\,\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$650)\quad ctg\,\frac{1}{2}(A-B)=tg\,\frac{1}{2}\,C\,sn\,\frac{a+b}{2}\,csc\,\frac{a-b}{2}$$

El tercer lado c se obtiene por una de las fórmulas siguientes:

$$651)\quad tg\,\frac{1}{2}\,c=tg\,\frac{1}{2}(a+b)\,\frac{sc\,\frac{1}{2}(A-B)}{sc\,\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$652)\quad tg\,\frac{1}{2}\,c=tg\,\frac{1}{2}(a+b)\,\frac{csn\,\frac{1}{2}(A+B)}{csn\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$653)\quad tg\,\frac{1}{2}\,c=tg\,\frac{a+b}{2}\,csn\,\frac{A+B}{2}\,sc\,\frac{A-B}{2}$$

$$654)\quad tg\,\frac{1}{2}\,c=tg\,\frac{1}{2}(a-b)\,\frac{sn\,\frac{1}{2}(A+B)}{sn\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

655) $$tg\,\frac{1}{2}\,c = tg\,\frac{1}{2}\,(a - b)\,\frac{csc\,\frac{1}{2}\,(A - B)}{csc\,\frac{1}{2}\,(A + B)}$$

656) $$tg\,\frac{1}{2}\,c = tg\,\frac{a - b}{2}\,sn\,\frac{A + B}{2}\,csc\,\frac{A - B}{2}$$

---

657) $$ctg\,\frac{1}{2}\,c = ctg\,\frac{1}{2}\,(a + b)\,\frac{sc\,\frac{1}{2}\,(A + B)}{sc\,\frac{1}{2}\,(A - B)}$$

658) $$ctg\,\frac{1}{2}\,c = ctg\,\frac{1}{2}\,(a + b)\,\frac{csn\,\frac{1}{2}\,(A - B)}{csn\,\frac{1}{2}\,(A + B)}$$

659) $$ctg\,\frac{1}{2}\,c = ctg\,\frac{a + b}{2}\,sc\,\frac{A + B}{2}\,csn\,\frac{A - B}{2}$$

660) $$ctg\,\frac{1}{2}\,c = ctg\,\frac{1}{2}\,(a - b)\,\frac{sn\,\frac{1}{2}\,(A - B)}{sn\,\frac{1}{2}\,(A + B)}$$

661) $$ctg\,\frac{1}{2}\,c = ctg\,\frac{1}{2}\,(a - b)\,\frac{csc\,\frac{1}{2}\,(A + B)}{csc\,\frac{1}{2}\,(A - B)}$$

662) $$ctg\,\frac{1}{2}\,c = ctg\,\frac{a - b}{2}\,csc\,\frac{A + B}{2}\,sn\,\frac{A - B}{2}$$

(Se continuará.)

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 172)

La longitud T de la tangente en M (x, y) contada hasta el punto N ($-x$, 0) de encuentro con el eje de la parábola es igual á p Sh t Ch t; pues

$$T^2 = (2x)^2 + y^2 = p^2 \operatorname{Sh}^4 t + p^2 \operatorname{Sh}^2 t = p^2 \operatorname{Sh}^2 t \operatorname{Ch}^2 t.$$

Se tiene por tanto

$$t = \frac{s - T}{p},$$

lo cual es una interpretación bastante curiosa de t.

Al valor de s se llega, algo menos sencillamente, tomando para variable independiente el ángulo θ de la tangente MN con la ordenada MM′. Este ángulo θ está ligado con t por la relación Ch t cos $\theta = 1$, pues cos $\theta = y : T = 1 : \operatorname{Ch} t$.

Encuéntrase asimismo, para la superficie S y el volumen V del paraboloide engendrado por el arco s al girar alrededor del eje de la parábola,

$$S = \frac{2}{3}\pi p^2 (\operatorname{Ch}^3 t - 1), \qquad V = \frac{1}{4}\pi p^3 \operatorname{Sh}^4 t,$$

valores que por otra parte fácilmente se obtienen, tomando y como variable independiente.

25. *Observación general sobre el empleo de las funciones hiperbólicas en las aplicaciones del análisis.* En las cuestiones que acabamos de tratar, y en especial en el estudio de la catenaria, de la tractriz y de la pseudoesfera, las funciones hiperbólicas se introducen por sí mismas en los cálculos, que se efectúan todos muy sencillamente.

Pero sería una ilusión creer que el empleo de las funciones circulares no hubiese presentado las mismas ventajas *bajo el punto de vista* precisamente *de la sencillez de los cálculos.* Por el contrario, en general, bajo este punto de vista, pueden á menudo emplearse indiferentemente una ú otra especie de funciones. Así, las cuestiones de los núms. 22, 23, 24 y aun la del 21, se tratan con igual facilidad tomando á θ como variable independiente, ó asignando este papel á la variable x.

Fácil es de encontrar la razón de este hecho. Se ha visto en los núms. 8 y 15, que las funciones hiperbólicas pueden expresarse por medio de las funciones circulares y recíprocamente. Toda cuestión tratada por medio de las unas puede también tratarse por medio de las otras é inversamente.

Pero no es menos cierto que en determinados problemas son las funciones circulares, y en otras las funciones hiperbólicas las que se introducen naturalmente en los cálculos. Si se quiere evitar el empleo de las funciones hiperbólicas, lo que parece poco razonable, sólo podrá conseguirse, sin tanteos y sin complicaciones de cálculo, sirviéndose implícitamente de las relaciones de los núms. 8 y 15, que acabamos de recordar. Por otra parte, únicamente empleando la notación de las funciones hiperbólicas es como se hará resaltar las analogías de ciertas cuestiones conexas, como suficientemente lo prueban los ejemplos de los núms. 19 y 20, á los cuales añadimos el que sigue.

Tratemos de encontrar el límite, para n indefinidamente creciente, de

$$y = \frac{(\sqrt{1+a^2}+a)^n - (\sqrt{1+a^2}-a)^n}{(\sqrt{1+a^2}+a)^n + (\sqrt{1+a^2}-a)^n}$$

Pongamos $a = \mathrm{Sh}\, t$, lo cual envuelve

$$\sqrt{1+a^2} = \mathrm{Ch}\, t$$

$$\sqrt{1+a^2}+a = \mathrm{Ch}\, t + \mathrm{Sh}\, t = e^t$$

$$\sqrt{1+a^2}-a = \mathrm{Ch}\, t - \mathrm{Sh}\, t = e^{-t}$$

Resultará

$$y = \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{e^{nt} + e^{-nt}} = \mathrm{Th}\, nt$$

que, para $n = \infty$, según el núm. 4, da $Lim\ y = 1$.

(Se continuará.)

NOTA SOBRE LAS APROXIMACIONES EN EL CÁLCULO LOGARÍTMICO (1)

Los autores de los manuales de Álgebra, al hablar de la aproximación de un número dado por su logaritmo, hacen la observación de que, siendo Δ la diferencia tabular, el número sólo puede obtenerse aproximado á $\frac{1}{\Delta}$: observación que sería completamente justificada, si el logaritmo, mediante el cual calculamos el número, lo mismo que el logaritmo tabular, fuesen exactos. Pero como el logaritmo tabular no está aproximado más que á $\frac{1}{2}$ (2), las diferencias sólo lo están á 1, y el logaritmo del número buscado, resultado en general de operaciones con otros logaritmos, tiene una aproximación variable, esta observación no nos basta para definir la aproximación de un número calculado mediante logaritmos. El mismo M. Vieille, en su obra especial *Théorie générale des approximations numériques*, á pesar de ocuparse minuciosamente de los errores que provienen de la hipótesis de la proporcionalidad de los pequeños incrementos de los números y de sus logaritmos, no resuelve sin embargo la cuestión general.

En esta Nota demuestro que siempre puede obtenerse el logaritmo de un número aproximado á $\frac{1}{2}$, calculo la aproximación de un número encontrado mediante su logaritmo, dada la aproximación de este logaritmo, y aplico estas reglas á un

(1) Traducido de los *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(2) Al hablar de un logaritmo, llamo *unidad* á la unidad del orden á que corresponde la última cifra de los logaritmos tabulares; al hablar de un número, la misma palabra designa la unidad del orden á que pertenece la cifra última de los números tabulares. Creo que este doble empleo de la misma palabra no ofrecerá al lector dificultad alguna.

ejemplo numérico, haciendo caso omiso de los errores que provienen de la proporcionalidad, pues sabido es que pueden despreciarse en vista de los errores que provienen de la inexactitud de los logaritmos tabulares.

Sean ε_1 y ε_2 los errores de dos logaritmos tabulares consecutivos, $\gamma = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ el error de la diferencia tabular, y d la parte fraccionaria del número, cuyo logaritmo deseamos obtener. El error, en este logaritmo, será en tal caso la suma de los errores del logaritmo tabular y del incremento calculado mediante la diferencia, es decir

$$(1) \qquad \varepsilon_1 + d\gamma.$$

Como el límite de ε_1 es $\frac{1}{2}$, y el límite de γ es 1, á primera vista pudiera creerse que el límite de (1) fuese $1\frac{1}{2}$; pero demostraremos que este límite es igual á $\frac{1}{2}$.

Hagamos notar que pueden presentarse los tres casos siguientes: 1º que ε_1 y ε_2 tengan los mismos signos, y que, respecto al valor numérico, ε_1 sea mayor que ε_2; 2º que sean de signos iguales, pero que el valor numérico de ε_2 sea mayor que el de ε_1; 3º que sean de signos contrarios.

En el primer caso, γ es menor que $\frac{1}{2}$ y de signo contrario á ε_1, y como d es una fracción propiamente dicha, la expresión (1) es una diferencia de dos fracciones, cada una de las cuales es menor que $\frac{1}{2}$; de consiguiente esta expresión es también menor que $\frac{1}{2}$.

En el segundo caso, γ es también menor que $\frac{1}{2}$, pero de signo contrario á ε_1; ahora bien, reemplazando ε_1 por $\varepsilon_2 - \gamma$, se obtiene

$$\varepsilon_2 - \gamma + d\gamma = \varepsilon_2 - (1 - d)\gamma,$$

y esta expresión, en la que γ es del mismo signo que ε_2, es también una diferencia de dos fracciones, menor que $\frac{1}{2}$ cada una de ellas.

En el tercer caso, γ puede ser mayor que $\frac{1}{2}$; pero si ponemos en (1) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ en vez de γ, resulta

$$\varepsilon_1 + d(\varepsilon_2 - \varepsilon_1(= (1 - d)\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

y como ε_1 y ε_2 son de signos contrarios, tenemos aún la diferencia de dos fracciones, cada una de ellas menor que $\frac{1}{2}$.

Vemos pues que, si tratamos de obtener el resultado con la mayor aproximación posible, no hay que despreciar en el incremento del logaritmo las cifras del orden inferior al de las *unidades* de los logaritmos. Aun en los cálculos elementales sería provechoso conservar estas cifras, sobre todo tratándose de multiplicar el logaritmo por un número entero.

Hasta aquí hemos supuesto que el número cuyo logaritmo queríamos calcular, lo mismo que su parte fraccionaria d, eran exactos: si el número sólo estuviere aproximado á α, se necesitaría ante todo conocer el error que de ello resultaría para el logaritmo. Este error tendrá por límite $\alpha\Delta'$, donde Δ' es el límite superior de la diferencia tabular. Encuéntrase este límite superior comparando la diferencia marcada al lado del número dado con las diferencias inmediatas.

Mediante estas reglas podremos siempre definir el límite del error en un logaritmo que resulta de operaciones con otros logaritmos y que representa el logaritmo del número buscado: este límite podrá ponerse bajo la forma $m \cdot \frac{1}{2}$. Si calculamos el número correspondiente á tal logaritmo, hay que añadir al número tabular la fracción $\frac{\delta}{\Delta}$, donde Δ es la diferencia tabular, y δ la diferencia entre nuestro logaritmo y el logaritmo tabular. La aproximación de Δ es 1, es decir

$2 \cdot \frac{1}{2}$, y la de δ es $(m+1)\frac{1}{2}$. Busquemos el error absoluto de la fracción $\frac{\delta}{\Delta}$ según la fórmula

$$\frac{\delta + \beta}{\Delta + \gamma} - \frac{\delta}{\Delta} = \frac{\Delta\beta - \delta\gamma}{(\Delta + \gamma)\Delta}.$$

Para encontrar el límite superior de esta fracción, observemos que δ y Δ son positivos, y representemos por β' y γ' los valores absolutos de β y γ. El numerador de esta fracción no puede ser mayor que $\Delta\beta' + \delta\gamma'$, y, *á fortiori*, tampoco puede ser mayor que $\Delta(\beta' + \gamma')$; el denominador no puede ser menor que $(\Delta - \gamma')\Delta$, de manera que la fracción no puede ser mayor que $\frac{\beta' + \gamma'}{\Delta - \gamma}$. Sustituyendo para β' y γ' sus valores límites $(m+1)\frac{1}{2}$ y 1, obtendremos el valor límite del error

(2) $$\frac{m+3}{2(\Delta - 1)}.$$

Como, en general, la división $\delta : \Delta$ no resulta exacta, habrá que añadir aún á este límite una fracción $\frac{r}{\Delta}$ (siendo r el resto de la división $\delta : \Delta$), fracción que en el límite podrá reemplazarse por $\frac{r}{\Delta - 1}$.

En el caso en que el logaritmo se encuentre en las tablas, el límite del error es

(2') $$\frac{m+1}{2(\Delta - 1)}$$

porque entonces deberá ponerse $\delta = 0$, por lo cual el término $\delta\gamma$ desaparece en el numerador.

La fracción (2′) representa el límite de lo que habría de añadirse al número tabular, si tanto el logaritmo que nos sirve para calcular el número, como el logaritmo tabular pudiesen darse exactamente.

Como ejemplo, calculemos la superficie de un triángulo por la fórmula

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen}(B+C)}$$

donde

$$a = 413{,}386, \qquad B = 36^\circ 47' 23'', \qquad C = 49^\circ 25' 40''.$$

El cálculo será

$$\begin{array}{rll}
\log a^2 = 5{,}2327116 & \text{aproximado á } 2\frac{1}{2} \\
\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}77733976 & \quad " & 1\frac{1}{2} \\
\log \operatorname{sen} C = \bar{1}{,}8805774 & \quad " & 1\frac{1}{2} \\
\log 2 = \bar{1}{,}6989700 & (1) & \\
\log \operatorname{sen}(B+C) = 0{,}00094708 & \quad " & 1\frac{1}{2} \\
\hline
\log S_2 = 4{,}59054584 & \text{aproximado á } 5\frac{1}{2}
\end{array}$$

Encontraremos en las tablas cinco cifras enteras, 38953, á las cuales se deberá añadir la fracción $\frac{49,4}{112}$ teniendo en cuenta el error $\frac{5+3}{2 \cdot 111} = \frac{4}{111}$.

(1) No marcamos la aproximación de log 2, pues, aun tomando este logaritmo con ocho cifras, sería 0,30103000, siendo su valor más exacto 0,30102999566 . . .

Como el número 2 entra con frecuencia en los cálculos, vale la pena recordar que su logaritmo no aumenta el error, excepto en el caso en que se le multiplique por un número considerable.

Efectuando la división 49,4 : 112, obtendremos la primera cifra del cociente 4 y el resto 4,6; la segunda cifra del cociente será también 4, y el resto correspondiente 0,12. Si tomamos S = 38953,4, este valor será en todo caso demasiado pequeño, por ser la parte omitida del incremento $\frac{4,6}{112}$ mayor que el error de sentido indefinido $\frac{4}{111}$; pero el error por defecto será menor que $\frac{8,6}{111}$, y también menor que 0,1. Si tomamos S = 38953,44, el límite del error será $\frac{4,12}{111}$, menor que 0,04.

Supongamos ahora que los datos de este cálculo no sean números exactos, sino aproximados á $\frac{1}{2}$ de su última cifra. De acuerdo con el significado convenido de la palabra *unidad* en el número, el límite de este error tendrá para cada número la expresión $\frac{1}{20}$.

Para el número a, la diferencia tabular es 105; pero, después de 105, encontramos diferencias 106: por tanto, para límite superior de esta diferencia hay que tomar 106, y el error del logaritmo de a^2, que proviene de la inexactitud del número, tendrá por límite

$$2 \cdot \frac{1}{20} \cdot 106 = 21, 2 \frac{1}{2} \cdot$$

De la misma manera podrían calcularse los límites en los logaritmos de los senos, pero encontramos en este ejemplo un caso especial: siendo (B + C) menor que 90°, los errores de B y de C dan errores del mismo sentido en los logaritmos de *sen* B y *sen* C que en el logaritmo de *sen* (B + C), y como este último logaritmo debe restarse de la suma de los dos primeros, el error total será también la diferencia de los errores correspondientes (1). Obtenemos para límite de estos tres errores $\frac{1}{20}(282 - 13) + \frac{1}{20}(181 - 13) = 43{,}7\,\frac{1}{2}$, de manera que el límite del error total, en el logaritmo, será

$$(5 + 21{,}2 + 43{,}7)\,\frac{1}{2}\text{, es decir } 70\,\frac{1}{2},$$

y el límite del error en el número $\frac{73}{2.111} = \frac{36{,}5}{111}$.

Siendo como antes $\frac{49{,}4}{112}$ el incremento del número, si se toman para S las cinco cifras enteras, se tiêne un valor de S aproximado por defecto en menos de $\frac{85{,}9}{111}$, es decir en menos de una unidad. Si se toma S con la primera cifra decimal, el sentido del error queda indeterminado, y el límite del error es $\frac{36{,}5}{111} + \frac{4{,}6}{112}$, es decir menor que 0,4.

VLADISLAO PUCHEWICZ.

(1) Designemos los errores de B y C por α y β (que son de signos indeterminados), el error de (B + C) será entonces ($\alpha + \beta$); designemos los límites de las diferencias tabulares correspondientes por Δ'_B, Δ'_C y Δ'_{B+C}; el límite del error será

$$\alpha\,\Delta'_B + \beta\,\Delta'_C - (\alpha + \beta)\,\Delta'_{B+C} = \alpha(\Delta'_B - \Delta'_{B+C}) + \beta(\Delta'_C - \Delta'_{B+C}),$$

donde en tal caso para Δ'_{B+C} deberá tomarse, no el límite superior, sino el límite inferior.

CUESTIONES PROPUESTAS

40. Deducir geométricamente expresiones formulares de las diferencias finitas del seno y del coseno.

41. Determinar geométricamente las derivadas ó coeficientes diferenciales del seno y del coseno.

42. Dada la función $\varphi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, poner en forma de matriz determinante de 4.º orden la expresión $\varphi(x) - x\dfrac{d\varphi}{dx}$.

43. Demostrar que todas las rectas de una congruencia lineal se apoyan sobre dos rectas fijas.

44. Construir el eje de un complejo lineal que contiene una recta dada L, y dos rectas conjugadas también dadas D y D'.

45. Dada la base B de un sistema de numeración, demostrar que los productos de (B — 1) por dos enteros que sumen (B + 1), se escriben en dicho sistema con las mismas cifras tomadas en un orden inverso.

46. Hallar el número de lados de un polígono que tiene 20 diagonales, sin aplicar las ecuaciones de segundo grado.

47. Dedacir geométricamente expresiones formulares de las diferencias finitas de la tangente y de la cotangente.

48. Determinar geométricamente las derivadas ó coeficientes diferenciales de la tangente y de la cotangente.

49. Sábese que cada cuatro años viene uno *bisiesto*; bisiesto que se suprime cada 100 años, y se restablece cada 400 años.—Si siguiendo esta ley se suprimieran los bisiestos cada 100^2 años, cada 100^3 años, etc., y se restablecieran al fin de cada período de 4×100^2, de 4×100^3, etc., años, demostrar que al cabo de un número indefinido de años esa operación equivale á haber añadido 8 días cada 33 años.

50. Demostrar que todo múltiplo de 8 es la suma de 8 cuadrados impares.—(E. CATALAN).

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.