ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 3 MARZO 1896

SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó. (*Continuación.*)—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansion. (*Continuación.*)—Vibraciones y ondas sonoras, por David Thomson. —Cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

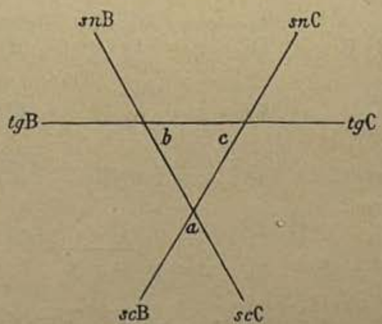
(*Continuación.* Véase pág. 28)

V

Resolución de triángulos rectilineo-rectángulos.

Para resolver los triángulos rectilineos rectángulos, en todos los casos que pueden ocurrir, proponemos el

Diagrama 5.º



formado con los números trigonométricos de los ángulos agudos B, C del triángulo, y con los elementos lineales a, b, c del mismo. De él se derivan las relaciones que ligan tres á tres los elementos del triángulo, mediante las reglas siguientes:

Un elemento extremo del diagrama es igual al cociente de los dos que le son consecutivos en su recta.

Un elemento intermedio es igual al producto de los dos que le son adyacentes en su recta.

El cuadrado del elemento inferior del triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los dos elementos superiores.

El cuadrado de uno de los elementos superiores es igual á la diferencia de cuadrados del elemento inferior y del superior adyacente al primero.

Aplicando estas reglas, y haciendo uso de las leyes de reciprocidad para dar forma entera á los resultados de forma trigonométrica fraccionaria, obtendremos:

61) $sn\,B = \frac{b}{a}$ 62) $tg\,B = \frac{b}{c}$ 63) $sc\,B = \frac{a}{c}$

64) $sn\,C = \frac{c}{a}$ 65) $tg\,C = \frac{c}{b}$ 66) $sc\,C = \frac{a}{b}$

67) $b = a\,sn\,B$ 73) $c = a\,sn\,C$ 79) $a = b\,sc\,C$

68) $b = \frac{a}{sc\,C}$ 74) $c = \frac{a}{sc\,B}$ 80) $a = \frac{b}{sn\,B}$

69) $b = a\,csn\,C$ 75) $c = a\,csn\,B$ 81) $a = b\,csc\,B$

70) $b = c\,tg\,B$ 76) $c = b\,tg\,C$ 82) $a = c\,sc\,B$

71) $b = \frac{c}{tg\,C}$ 77) $c = \frac{b}{tg\,B}$ 83) $a = \frac{c}{sn\,C}$

72) $b = c\,ctg\,C$ 78) $c = b\,ctg\,B$ 84) $a = c\,csc\,C$

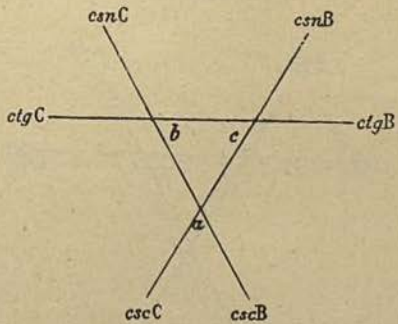
85) $a^2 = b^2 + c^2$ 86) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

87) $b^2 = a^2 - c^2$ 88) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a+c)(a-c)}$

89) $c^2 = a^2 - b^2$ 90) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

También pueden resolverse los triángulos rectilíneos rectángulos mediante el

Diagrama 6.º



formado con los conúmeros trigonométricos de los ángulos agudos B, C del triángulo, y con los elementos lineales a, b, c del mismo.

Aplicando las reglas establecidas para el diagrama 5.º, obtendremos:

91) $csn\ \mathrm{C} = \frac{b}{a}$ 92) $ctg\ \mathrm{C} = \frac{b}{c}$ 93) $csc\ \mathrm{C} = \frac{a}{c}$

94) $csn\ \mathrm{B} = \frac{c}{a}$ 95) $ctg\ \mathrm{B} = \frac{c}{b}$ 96) $csc\ \mathrm{B} = \frac{a}{b}$

97) $b = a\ csn\ \mathrm{C}$ 103) $c = a\ csn\ \mathrm{B}$ 109) $a = b\ csc\ \mathrm{B}$

98) $b = \frac{a}{csc\ \mathrm{B}}$ 104) $c = \frac{a}{csc\ \mathrm{C}}$ 110) $a = \frac{b}{csn\ \mathrm{C}}$

99) $b = a\ sn\ \mathrm{B}$ 105) $c = a\ sn\ \mathrm{C}$ 111) $a = b\ sc\ \mathrm{C}$

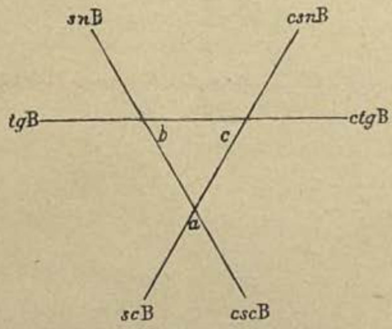
100) $b = c\ ctg\ \mathrm{C}$ 106) $c = b\ ctg\ \mathrm{B}$ 112) $a = c\ csc\ \mathrm{C}$

101) $b = \frac{c}{ctg\ \mathrm{B}}$ 107) $c = \frac{b}{ctg\ \mathrm{C}}$ 113) $a = \frac{c}{csn\ \mathrm{B}}$

102) $b = c\ tg\ \mathrm{B}$ 108) $c = b\ tg\ \mathrm{C}$ 114) $a = c\ sc\ \mathrm{B}$

Pueden asimismo resolverse los triángulos rectilíneos rectángulos mediante el

Diagrama 7.º



formado con los números trigonométricos de uno de los ángulos agudos B, con los conúmeros del mismo, y con los elementos lineales a, b, c del triángulo.

Aplicando las mismas reglas que en los casos anteriores, obtendremos:

115) $sn\ B = \frac{b}{a}$ 116) $tg\ B = \frac{b}{c}$ 117) $sc\ B = \frac{a}{c}$

118) $csn\ B = \frac{c}{a}$ 119) $ctg\ B = \frac{c}{b}$ 120) $csc\ B = \frac{a}{b}$

121) $b = a\ sn\ B$ 125) $c = a\ csn\ B$ 129) $a = b\ csc\ B$

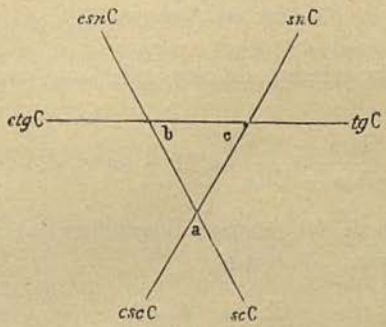
122) $b = \frac{a}{csc\ B}$ 126) $c = \frac{a}{sc\ B}$ 130) $a = \frac{b}{sn\ B}$

123) $b = c\ tg\ B$ 127) $c = b\ ctg\ B$ 131) $a = c\ sc\ B$

124) $b = \frac{c}{ctg\ B}$ 128) $c = \frac{b}{tg\ B}$ 132) $a = \frac{c}{csn\ B}$

Igualmente pueden resolverse los triángulos rectilíneos rectángulos mediante el

Diagrama 8.º



formado con los conúmeros trigonométricos del ángulo agudo C, con los números del mismo, y con los elementos lineales *a*, *b*, *c* del triángulo.

Aplicando las mismas reglas que en los casos anteriores, obtendremos:

133) $csn\ C = \frac{b}{a}$ 134) $ctg\ C = \frac{b}{c}$ 135) $csc\ C = \frac{a}{c}$

136) $sn\ C = \frac{c}{a}$ 137) $tg\ C = \frac{c}{b}$ 138) $sc\ C = \frac{a}{b}$

139) $b = a\ csn\ C$ 143) $c = a\ sn\ C$ 147) $a = b\ sc\ C$

140) $b = \frac{a}{sc\ C}$ 144) $c = \frac{a}{csc\ C}$ 148) $a = \frac{b}{csn\ C}$

141) $b = c\ ctg\ C$ 145) $c = b\ tg\ C$ 149) $a = c\ csc\ C$

142) $b = \frac{c}{tg\ C}$ 146) $c = \frac{b}{ctg\ C}$ 150) $a = \frac{c}{sn\ C}$

(*Se continuará.*)

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 34)

Dividiendo la primera de estas relaciones por la tercera, se halla

$$\frac{\mathrm{Sh}\, m + \mathrm{Sh}\, n}{\mathrm{Ch}\, m + \mathrm{Ch}\, n} = \mathrm{Th}\, \frac{1}{2}\,(m+n).$$

8. *Expresión de las funciones hiperbólicas por medio de las funciones circulares.* Pongamos

$$\mathrm{Ch}\, t \cos \theta = 1, \qquad (1)$$

siendo θ un ángulo comprendido entre -90° y $+90^\circ$ y del mismo signo que t. Este ángulo, llamado *amplitud hiperbólica* de t, se representa abreviadamente por la notación Amh t.

Dedúcese fácilmente de (1)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch}\, t &= \sec \theta, & \mathrm{Sech}\, t &= \cos \theta, \\ \mathrm{Sh}\, t &= \mathrm{tang}\, \theta, & \mathrm{Cosech}\, t &= \cot \theta, \qquad (2) \\ \mathrm{Th}\, t &= \mathrm{sen}\, \theta, & \mathrm{Cot}\, t &= \mathrm{cosec}\, \theta, \end{aligned}$$

y también el *teorema de Laisant*, á saber

$$\mathrm{Th}\, \frac{1}{2}\, t = \frac{2\, \mathrm{Sh}\, \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{Ch}\, \frac{1}{2}\, t}{2\, \mathrm{Ch}^2\, \frac{1}{2}\, t} = \frac{\mathrm{Sh}\, t}{1 + \mathrm{Ch}\, t} = \frac{\mathrm{tang}\, \theta}{1 + \dfrac{1}{\cos \theta}} =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\, \theta}{1 + \cos \theta} = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2}\, \theta.$$

Se tiene, en consecuencia,

$$e^t = \mathrm{Ch}\, t + \mathrm{Sh}\, t = \frac{1 + \mathrm{sen}\, \theta}{\cos \theta} = \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$t = \mathrm{log.\ nep.\ tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

9. *Tabla de funciones hiperbólicas.* Para transformar en tabla de funciones hiperbólicas una tabla de funciones circulares, basta añadir á ésta una columna que contenga los valores de t correspondientes á los diversos valores de θ desde 0 á 90°. Así es como ha procedido Hoüel en sus Tablas con 4 decimales, que ocupan diez páginas de su *Recueil de Formules et de Tables numériques* (Paris, Gauthier-Villars, 1866; 3me édition, 1884). Da en seis columnas los valores de

$$\text{sen}\ \theta,\quad \text{cosec}\ \theta,\quad \tan\ \theta,\quad \cot\ \theta,\quad \sec\ \theta,\quad \cos\ \theta,$$

para cada milésimo del cuadrante. Al lado de los valores de θ están inscritos los valores correspondientes de t. Por tanto, las seis columnas dan también, para estos valores de t, los valores de

$$\text{Th}\ t,\quad \text{Coth}\ t,\quad \text{Sh}\ t,\quad \text{Cosech}\ t,\quad \text{Ch}\ t,\quad \text{Sech}\ t.$$

Otras diez páginas, fronteras á las primeras, hacen conocer los logaritmos de los números contenidos en las seis columnas, y además los valores de Mt, siendo M el módulo de los logaritmos vulgares ó logaritmos de Briggs, de suerte que

$$Mt = \text{Log. Briggs tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

En el caso de ser t bastante grande, el valor de Mt es útil para calcular el logaritmo vulgar de $\frac{1}{2}e^t = \text{Sh}\ t = \text{Ch}\ t$. Se tiene, en efecto,

$$\text{Log. Briggs}\ \frac{1}{2}e^t = Mt - \text{Log. Briggs}\ 2 = Mt - 0{,}30103.$$

He aquí una tablita análoga á la de Hoüel, que da para todos los grados del cuadrante los valores naturales de las funciones hiperbólicas y circulares.

TABLA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y CIRCULARES

t	θ	Th t sen θ	Coth t cosec θ	Sh t tang θ	Cosech t cot θ	Ch t sec θ	Sech t cos θ	*	*
0,0000	0°	0,0000	∞	0,0000	∞	1,0000	1,0000	90°	∞
0,0175	1°	0,0175	57,2987	0,0175	57,2900	1,0002	0,9998	89°	4,7413
0,0349	2°	0,0349	28,6537	0,0349	28,6363	1,0006	0,9994	88°	4,0481
0,0524	3°	0,0523	19,1073	0,0524	19,0811	1,0014	0,9986	87°	3,6425
0,0699	4°	0,0698	14,3356	0,0699	14,3007	1,0024	0,9976	86°	3,3548
0,0874	5°	0,0872	11,4737	0,0875	11,4301	1,0038	0,9962	85°	3,1313
0,1049	6°	0,1045	9,5668	0,1051	9,5144	1,0055	0,9945	84°	2,9487
0,1225	7°	0,1219	8,2055	0,1228	8,1443	1,0075	0,9925	83°	2,7942
0,1401	8°	0,1392	7,1853	0,1405	7,1154	1,0098	0,9903	82°	2,6603
0,1577	9°	0,1564	6,3925	0,1584	6,3138	1,0124	0,9877	81°	2,5424
0,1754	10°	0,1736	5,7588	0,1763	5,6713	1,0154	0,9848	80°	2,4362
0,1932	11°	0,1908	5,2408	0,1944	5,1446	1,0187	0,9816	79°	2,3404
0,2110	12°	0,2079	4,8097	0,2126	4,7046	1,0223	0,9781	78°	2,2528
0,2289	13°	0,2250	4,4455	0,2309	4,3315	1,0263	0,9744	77°	2,1721
0,2468	14°	0,2419	4,1336	0,2493	4,0108	1,0306	0,9703	76°	2,0973
0,2648	15°	0,2588	3,8637	0,2679	3,7321	1,0353	0,9659	75°	2,0276
0,2830	16°	0,2756	3,6280	0,2867	3,4874	1,0403	0,9613	74°	1,9622
0,3012	17°	0,2924	3,4203	0,3057	3,2709	1,0457	0,9563	73°	1,9008
0,3195	18°	0,3090	3,2361	0,3249	3,0777	1,0515	0,9511	72°	1,8427
0,3379	19°	0,3256	3,0716	0,3443	2,9042	1,0576	0,9455	71°	1,7877
0,3564	20°	0,3420	2,9238	0,3640	2,7475	1,0642	0,9397	70°	1,7354
0,3750	21°	0,3584	2,7904	0,3839	2,6051	1,0711	0,9336	69°	1,6856
0,3938	22°	0,3746	2,6695	0,4040	2,4751	1,0785	0,9272	68°	1,6379
*	*	cos θ Sech t	sec θ Ch t	cot θ Cosech t	tang θ Sh t	cosec θ Coth t	sen θ Th t	θ	t

t	θ	Th t sen θ	Coth t cosec θ	Sh t tang θ	Cosech t cot θ	Ch t sec θ	Sech t cos θ	*	*
0,4127	23°	0,3907	2,5593	0,4245	2,3559	1,0864	0,9205	67°	1,5923
0,4317	24°	0,4067	2,4586	0,4452	2,2460	1,0946	0,9135	66°	1,5485
0,4509	25°	0,4226	2,3662	0,4663	2,1445	1,1034	0,9063	65°	1,5065
0,4702	26°	0,4384	2,2812	0,4877	2,0503	1,1126	0,8988	64°	1,4659
0,4897	27°	0,4540	2,2027	0,5095	1,9626	1,1223	0,8910	63°	1,4268
0,5094	28°	0,4695	2,1301	0,5317	1,8807	1,1326	0,8830	62°	1,3890
0,5293	29°	0,4848	2,0627	0,5543	1,8040	1,1434	0,8746	61°	1,3524
0,5493	30°	0,5000	2,0000	0,5774	1,7321	1,1547	0,8660	60°	1,3170
0,5696	31°	0,5150	1,9416	0,6009	1,6643	1,1666	0,8572	59°	1,2826
0,5900	32°	0,5299	1,8871	0,6249	1,6003	1,1792	0,8480	58°	1,2492
0,6107	33°	0,5446	1,8361	0,6494	1,5399	1,1924	0,8387	57°	1,2167
0,6327	34°	0,5592	1,7883	0,6745	1,4826	1,2062	0,8290	56°	1,1851
0,6528	35°	0,5736	1,7434	0,7002	1,4281	1,2208	0,8192	55°	1,1542
0,6743	36°	0,5878	1,7013	0,7265	1,3764	1,2361	0,8090	54°	1,1242
0,6960	37°	0,6018	1,6616	0,7536	1,3270	1,2521	0,7986	53°	1,0948
0,7180	38°	0,6157	1,6243	0,7813	1,2799	1,2690	0,7880	52°	1,0662
0,7403	39°	0,6293	1,5890	0,8098	1,2349	1,2868	0,7771	51°	1,0381
0,7629	40°	0,6428	1,5557	0,8391	1,1918	1,3054	0,7660	50°	1,0107
0,7859	41°	0,6561	1,5243	0,8693	1,1504	1,3250	0,7547	49°	0,9838
0,8092	42°	0,6691	1,4945	0,9004	1,1106	1,3456	0,7431	48°	0,9575
0,8328	43°	0,6820	1,4663	0,9325	1,0724	1,3673	0,7314	47°	0,9316
0,8569	44°	0,6947	1,4396	0,9657	1,0355	1,3902	0,7193	46°	0,9063
0,8814	45°	0,7071	1,4142	1,0000	1,0000	1,4142	0,7071	45°	0,8814
*	*	cos θ Sech t	sec θ Ch t	cot θ Cosech t	tang θ Sh t	cosec θ Coth t	sen θ Th t	θ	t

10. *Funciones hiperbólicas inversas.* Sean

$$x = \text{Ch}\, t, \qquad y = \text{Sh}\, t, \qquad z = \text{Th}\, t.$$

Expresemos t por medio de x, de y ó de z. Se tiene

$$x + y = e^t, \qquad x^2 - y^2 = 1; \tag{1}$$

de donde, eliminando y,

$$e^t = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x \pm \sqrt{x^2 - 1})(x \mp \sqrt{x^2 - 1})}{x \mp \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \frac{1}{x \mp \sqrt{x^2 - 1}},$$

es decir

$$e^t = x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{ó} \qquad e^t = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}. \qquad (x \overline{\overline{>}} 1)$$

Luego, si l designa un logaritmo neperiano,

$$t = l\,(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm\, l\,(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

A un mismo valor de x corresponden dos valores iguales y de signos contrarios para t, lo que está de acuerdo con el núm. **3**.

Eliminando x, que siempre es positiva, entre las ecuaciones (1), se encuentra sin ambigüedad

$$e^t = y + \sqrt{1 + y^2}, \qquad t = l\,(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

La relación entre t y z es sucesivamente

$$z = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}, \qquad z\,(e^{2t} + 1) = e^{2t} - 1,$$

$$e^{2t} = \frac{1 + z}{1 - z}; \quad t = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + z}{1 - z} = l \sqrt{\frac{1 + z}{1 - z}}. \qquad (z^2 \overline{\overline{<}} 1)$$

Los valores de t en x, y ó z se designan algunas veces por

$$\text{Arg Ch}\, x, \qquad \text{Arg Sh}\, y, \qquad \text{Arg Th}\, z,$$

que se leen *argumento cuyo coseno hiperbólico es* x, etc.

(Se continuará.)

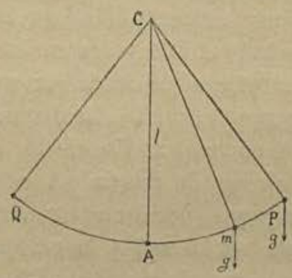
VIBRACIONES Y ONDAS SONORAS (1)

POR

David Thomson

Presupone todo sonido que tanto en el cuerpo sonoro como en el aire, ó medio de transmisión, y en el propio órgano del oído, haya un movimiento vibratorio de partículas; y siendo así, á las leyes de tal movimiento debe recurrirse para sentar los principios de la Acústica.

Es el péndulo el ejemplo más familiar de vibraciones que puede citarse. Reducido este instrumento á su mayor sencillez, es una esferita pesada unida á un hilo fino pendiente de la otra punta que está fija. Sólo en una posición la esferita queda reposada, y ésto es cuando el hilo es vertical y no lleva impulso, porque entonces se equilibran las dos fuerzas que sobre la esferita actúan, á saber, la tensión del hilo y la gravedad ó fuerza atractiva de la tierra. Así, con C por punto de



suspensión y CA por vertical trazada desde C con una longitud l igual á la del hilo, será A la posición de equilibrio de la esferita mencionada.

(1) Traducido de la *Encyclopædia Britannica*, tomo I, página 100.

Mas llévese ésta desde A hasta P, manteniendo tirante el hilo, y déjesela entonces. No opuesta ahora la tensión del hilo directamente á la dirección de la gravedad g, se moverá la esferita describiendo el arco circular PA de radio igual á l, con creciente velocidad, conforme se vaya acercando al punto A, adonde llegará con la máxima. En virtud de la velocidad adquirida, la esferita seguirá avanzando de A hacia Q; pero como ahora la gravedad tiende á dirigirla hacia A, el movimiento será retardado, la velocidad disminuirá de continuo y finalmente quedará anulada en el punto Q que debiera estar de A á igual distancia que P; pero que estará á menor distancia á causa del rozamiento, la resistencia del aire. etc. Desde Q volverá con movimiento acelerado hacia A, adonde llegará con la máxima velocidad en sentido opuesto al de antes, esto es, de izquierda á derecha; desde A, por la velocidad adquirida, se encaminará hacia P; y después, descendiendo otra vez, se reproducirán los movimientos antedichos. Así, pues, la esferita oscilará, yendo y viniendo á cada lado de A; mas la *amplitud* de vibración ó distancia angular entre las dos posiciones extremas menguará poco á poco á causa de las resistencias referidas, y anulándose al cabo, la esferita quedará reposada en su posición de equilibrio A.

Fácil es demostrar que cuando la amplitud de vibración está comprendida entre estrechos límites, se realiza el movimiento como si, quitado el hilo y desprovista la esferita enteramente de peso, estuviese solicitada por una fuerza dirigida hacia el punto A y proporcional á la distancia á que de este punto la esferita se encuentra. En efecto, si m es una posición suya, cabe decir que la cuerda mA coincide con la tangente al arco en m y que, por tanto, es perpendicular á Cm. Pero, descompuesta según mA y la prolongación de Cm la gravedad g que actúa paralelamente á CA, la primera componente será destruida por la tensión del hilo, y sólo quedará como aceleración efectiva la componente tangencial según mA, la cual, por el triángulo de las fuerzas, vale $g\frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{C}m}$ ó $\frac{g}{l}\mathrm{A}m$ y, por consiguiente, es proporcional á Am.

Pero cuando las vibraciones son, como suponemos, sumamente pequeñas, el péndulo es isócrono, lo cual quiere decir que un péndulo de longitud dada l invierte el mismo tiempo en pasar de una á otra posición extrema, cualquiera que sea la amplitud de vibración.

Así, pues, sea cual fuere la índole de las fuerzas que soliciten una partícula, si la resultante de ellas se dirige siempre á un punto fijo A y es proporcional á la distancia á que de este punto se halle la partícula, oscilará ésta yendo y viniendo á ambos lados de dicho punto A en tiempos iguales, pues no dependerán de la amplitud de tales vibraciones, si son éstas sumamente pequeñas.

No hay en el citado ejemplo más que una partícula aislada puesta en vibración por fuerzas exteriores; pero lo expuesto puede repetirse cuando se trate, como en Acústica, del movimiento vibratorio de partículas que formen un sistema ó conjunto enlazado, donde las fuerzas, que produzcan tal movimiento, nazcan de las acciones mutuas de dichas partículas. Hállanse esas fuerzas entre sí equilibradas cuando ocupan los puntos materiales ciertas posiciones relativas; pero si una nueva fuerza perturba por breve tiempo uno ó varios de ellos, produciendo su mutua aproximación ó separación; en cuanto cese tal fuerza, las partículas movidas tenderán en seguida, si el cuerpo es elástico, á recobrar las posiciones que tenían cuando estaban sosegadas; y de aquí nacerá en cada una, en torno de su punto respectivo de equilibrio, como en el caso del péndulo, un movimiento vibratorio que en ese punto alcanzará siempre la máxima velocidad en direcciones alternativamente opuestas. Por ejemplo, si en la boca de un tubo lleno de aire se pone un émbolo de igual sección que el tubo, al empujarlo un poco y retirarlo en seguida, las partículas de aire que compongan una capa delgada en la boca del tubo, vibrarán en direcciones paralelas al eje del mismo. Pero para que un medio pueda adquirir vibración molecular, debe, como queda dicho, estar dotado de *elasticidad*, esto es, de una tendencia constante á recobrar sus primitivas condiciones, cuando levemente se alteran.

Mas ¿cómo la conmoción, en virtud de la cual son separadas de sus posiciones de equilibrio ciertas partículas en un medio elástico, se transmite sucesivamente á las restantes del mismo medio haciéndolas á su vez entrar en vibración?

Imagínese una línea de tales partículas

$$y \quad x \quad a_1 \quad a \quad a_2 \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \quad k \quad l \quad m \quad n \quad o \quad p$$

. . . .

entre si equidistantes, y supóngase que una de ellas a, por cualquier medio, sea llevada á a_1. Por lo antedicho, esta partícula irá de a_1 á a_2 y volverá de aquí á allí, invirtiendo cierto tiempo T en completar esta doble vibración. Pero claro es que habiéndose aumentado la distancia entre a y la inmediata partícula b de la derecha, al correrse la primera á a_1, tenderá b á moverse hacia a_1, pues las fuerzas mutuas ya no estarán en equilibrio, sino que tendrán una resultante en la dirección $b\,a_1$. Así, pues, la partícula b se correrá también y oscilará en torno del punto b. Por igual motivo las partículas $c\,d$ . . . entrarán á su vez en vibración, y de esta suerte se irá propagando la conmoción según la línea considerada. Por de contado, también se transmitirá desde a hacia x, y . . . , esto es, en sentido opuesto. Mas concretándonos á la propagación en el sentido $a\,b\,c$ . . . , notemos que la conmoción llegará siempre á cada partícula después que á su inmediata precedente, y por tanto esa partícula no se hallará en el mismo estado de vibración, sino al cabo de cierto intervalo de tiempo después que la partícula anterior.

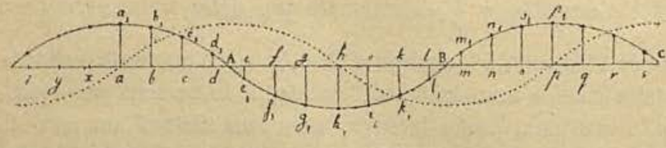
Dícese que dos partículas están en la misma *fase* cuando, moviéndose en el mismo sentido y con igual velocidad, se hallan igualmente separadas de sus respectivas posiciones de equilibrio. Con esta definición, la antedicha consecuencia puede expresarse de este modo: en un medio conmovido, dos partículas, situadas á distancias distintas del centro de conmoción, alcanzan la misma fase en tiempos diferentes: en tiempo posterior la partícula más distante.

Supóngase que á la vez que los espacios sucesivos ab, bc, cd . . . sean iguales, lo sean también los tiempos transcurridos entre las fases idénticas de b y a, de c y b . . . ¿Cuál será entonces, en un momento dado, el aspecto que presente la hilera de las diferentes partículas?

Sea T el tiempo invertido por cada partícula en una vibración *completa*, y $\frac{T}{p'}$ el intervalo que debe transcurrir para que se transmita á b cualquier fase de a. Si en cierto instante ha alcanzado a su máxima desviación, á la derecha por ejemplo, b caminará hacia la suya, pero aun distará un poco de ella, c distará un poco más de la suya, y así prosiguiendo. Mas se hallará al cabo una partícula p, á una distancia $ap = p'.ab$, que irá tras de a rezagada en vibración un tiempo $p'.\frac{T}{p'} = T$, y que, por tanto, se encontrará precisamente en la misma fase que a. Es claro que entre ambas partículas a, p, las habrá en todas las fases posibles del movimiento vibratorio. Así, en h que está de a á una distancia $\frac{1}{2}ap$, la diferencia de fase, comparada con la de a, valdrá $\frac{1}{2}$ T, lo cual quiere decir que, en un momento dado, h y a alcanzarán su máxima desviación por opuesto lado de sus respectivas posiciones de equilibrio, ó en otros términos, que h estará cabalmente en fase opuesta á la de a.

Son vibraciones *longitudinales* las hasta aquí examinadas, esto es, vibraciones acaecidas en la misma dirección en que se transmite la conmoción de una á otra partícula. Pero las vibraciones pueden ocurrir en cualquier dirección y hasta ser curvilíneas. Llámanse *transversales* cuando se realizan perpendicularmente á la recta, según la cual se transmite la conmoción.

Mas el razonamiento expuesto en el caso precedente es de aplicación general y puede repetirse para las vibraciones transversales. Señálense las posiciones a_1, b_1, c_1, . . . , que las diversas partículas, en su oscilación transversal, ocupan en el momento en que a alcanza su máximo desvío *sobre* su posición de equilibrio, y trácese una línea continua que pase por los puntos señalados: tal línea, con sus ordenadas, presentará á la vista el estado del movimiento vibratorio en ese momento. Así, estarán en la *misma* fase a y p, b y q, c y r . . . , y en fase *opuesta* a y h, b é i, c y k . . .



La distancia que, como la $a\,p$ ó $b\,q$ . . . , media entre dos partículas de igual fase, es recorrida por la conmoción en el tiempo T de una vibración completa y comprende partículas con *todas* las fases posibles de movimiento vibratorio. Pasada esta distancia, la curva se repite exactamente, es decir, las fases se suceden en el mismo orden que antes.

Bien se echa de ver la semejanza que la curva trazada tiene con las ondas de un lago ó estanque rizado por el viento, pues hay en ella surcos ó valles, como Ah_1B, y lomas ó cumbres, como Bp_1C. De aquí, que tanto en Acústica como en Óptica se usen los términos *onda* y *ondulación*. Llámase *longitud de onda*, y suele designarse por λ, la distancia $AC = ap = bq$ . . . que separa dos partículas de igual fase y que, por tanto, comprende un valle y una cumbre.

Como la curva se repite en cada trecho igual á λ, infiérese que en un momento dado dos partículas estarán en igual fase, si la distancia entre ellas, en la dirección en que la conmoción se transmite, es igual á λ, 2λ, 3λ . . . y en general $n\lambda$, representando por n un número entero. Pero estarán en contraria ú *opuesta* fase dos partículas como a y h, b é i, . . . separadas por una distancia igual á $\frac{1}{2}\lambda$, ó bien $\frac{1}{2}\lambda + \lambda = \frac{3}{2}\lambda$, ó en general $\frac{1}{2}\lambda + n\lambda = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, esto es, un múltiplo impar de $\frac{\lambda}{2}$.

Construcción semejante á la que acaba de indicarse para señalar los desvíos de las partículas en un momento dado, puede hacerse para mostrar gráficamente las velocidades de que en el mismo momento estén animadas. Levántense en los diferentes puntos a, b, c, . . . rectas perpendiculares á la línea que los contiene; dése á esas rectas, en el sentido de las velocidades, longitudes proporcionales á éstas, y trácese una curva por los puntos extremos de dichas perpendiculares: tal curva será el dibujo apetecido. En el grabado está indicada por puntos. La onda en ella es de igual longitud que la onda en la curva de desviaciones, pero el punto más alto de la loma y el más bajo del surco, de una de estas curvas, corresponden á los puntos donde la otra curva corta la línea de equilibrio.

Para representar gráficamente los desvíos y velocidades de partículas que vibran *longitudinalmente*, conviene que las rectas, con las cuales esas magnitudes se señalen, no sean trazadas en la dirección de la línea abc . . . , según la cual se transmite el movimiento, sino perpendicularmente á ella, dirigiendo hacia arriba las ordenadas que indiquen desvíos ó velocidades á la derecha, es decir, en el sentido en que la conmoción se realiza; y hacia abajo las ordenadas que indiquen desvíos ó velocidades en sentido opuesto. Hecho así, las ondas de desvío y de velocidad quedarán representadas del mismo modo que las concernientes á vibraciones transversales, y por tanto á las mismas leyes estarán ajustadas.

Mas no sólo permite el mencionado dibujo abarcar de una mirada las circunstancias del movimiento vibratorio en un momento dado, sino en cualquier otro. Pues si, por ejemplo, se desea saber lo sucedido al cabo de un intervalo de tiempo $\frac{T}{p}$, bastará imaginar que toda la onda (ya sea de desvío ó de velocidad) se haya corrido á la derecha una distancia igual á ab, y con ello se verá que el estado de movimiento en que a se hallaba, se ha trasladado á b, el de b á c, y así prosiguiendo. Al cabo de otro intervalo igual, el estado de las partículas se mostrará del mismo modo con la onda, corrida á la derecha otro igual espacio. De suerte que todas las circunstancias quedarán manifiestas haciendo avanzar de continuo por la línea abc . . . las dos ondas (la de desvío y la de velocidad) con un movimiento cuya velocidad V permita salvar el espacio *ab* en el tiempo $\frac{T}{p'}$, siendo, por consiguiente,

$$V = ab : \frac{T}{p'} = \frac{p'.ab}{T} = \frac{AC}{T} = \frac{\lambda}{T}.$$

Llámase ésta la ***velocidad de propagación*** de la onda y equivale, como se ve, á la longitud de la onda dividida por el tiempo de la vibración completa de cada partícula. Expresando, cosa por lo común más conveniente, T en función del número *n* de vibraciones completas realizadas en un tiempo determinado, á saber, en el que sirva de unidad, será

$$\frac{1}{T} = n \qquad \text{y} \qquad V = n\lambda.$$

Hay que notar, sin embargo, una diferencia muy importante entre las vibraciones longitudinales y las transversales, pues al propagarse estas últimas de una á otra partícula en un medio elástico, no alteran las distancias relativas de las partículas, ó en otros términos, no causan en todo el medio ninguna variación de densidad; y en cambio, las vibraciones longitudinales, que ponen la mayor parte de las partículas más cerca ó más lejos unas de otras que estaban antes de ser conmovidas, producen necesariamente condensaciones alternadas con enrarecimientos ó dilataciones.

En efecto, échase de ver en la figura que, en el momento á que se refiere, son iguales y del mismo sentido los desvíos de las partículas inmediatas, entre las cuales está comprendida *a*; luego en dicho momento la densidad del medio en *a* es igual á la del medio sosegado. Y lo propio acontece en los puntos *h*, *p*..., de máximo desvio y velocidad de vibración nula. Pero en un punto como *c*, situado entre *a* y A, los desvíos de las dos partículas inmediatas, precedente y siguiente, ambos ocurren á la derecha, mas el de la partícula precedente es el mayor de los dos, y, por tanto, la densidad del medio en todo el trecho *a* A excede á la densidad del medio sosegado. Y de la misma suerte, en cualquier punto como *f*, situado entre A y *h*, igual hecho acontece, pues si bien los desvíos de las dos partículas contiguas ocurren por la izquierda, es mayor el de la partícula siguiente á *f*. Por consiguiente, desde *a* hasta *h*, el medio está condensado. En cambio, entre *h* y B, por ejemplo en *k*, los desvíos de las dos partículas contiguas ocurren á la izquierda; pero el de la partícula precedente es el mayor; por tanto, aquí el medio está enrarecido; y como asimismo se probaría que otro tanto acontece desde B hasta *p*..., resulta dilatación ó enrarecimiento desde *h* hasta *p*. En A la condensación es la máxima, porque á ambos lados de este punto los desvíos son iguales y están dirigidos hacia A; así como en B la dilatación es la máxima, porque á derecha é izquierda de este punto los desvíos son iguales y ambos se apartan de B.

Infiérese de lo antedicho que si se traza una curva en la cual cada ordenada sea proporcional á la diferencia entre la densidad en el punto correspondiente del medio conmovido y la densidad del medio sosegado—dirigiendo hacia arriba las ordenadas que señalen condensación y hacia abajo las que indiquen dilatación—esa curva cortará la línea de reposo ó equilibrio de las partículas *abc*... en los mismos puntos donde la corte la curva de velocidades. Su onda, pues, tendrá la misma longitud λ y se elevará ó descenderá á la par que la otra se eleve ó descienda. Pero aun hay más íntimo enlace entre la onda de velocidad y la onda de condensación y dilatación, cuando, como acontece siempre en Acústica, son pequeñísimos los desvíos de las partículas. Pues, puede demostrarse que entonces, en cualquier punto del medio, el grado de condensación ó enrarecimiento es proporcional á la velocidad de vibración en dicho punto. Luego las mismas ordenadas que representen las velocidades, representarán los grados de condensación ó dilatación, ó en otros términos, la onda de estas magnitudes coincidirá en el dibujo con la onda de velocidad.

CUESTIONES PROPUESTAS

19. Demostrar que en un rayo luminoso polarizado circularmente, la velocidad es constantemente igual al valor máximo que toma en ciertos momentos en cada uno de los dos rayos componentes.

20. Demostrar que el valor inverso de la resistencia de un conductor eléctrico múltiple es igual á la suma de los valores inversos de las resistencias de los conductores componentes.

21. Repartir 38 540 pesetas entre tres niños de 7, 10 $^1/_2$ y 11 años de edad, de modo que, colocada á interés compuesto, al 4 $^1/_2$ por 100, la parte de cada niño, vengan á reunir los tres la misma cantidad á la edad de 20 años.

22. El volante de una máquina de vapor da 180 vueltas en 5 minutos contados con un reloj que retrasa 2 minutos 40 segundos por día; ¿Cuál es el número exacto de vueltas que da el volante en un minuto?

23. Un kilogramo de hulla da 7 656 calorías; uno de leña 3 600. Un metro cúbico de leña pesa 360 kilogramos; un hectólitro de hulla pesa 48 kilogramos: pero el metro cúbico de leña cuesta 26 pesetas, y los 15 hectólitros de hulla 40 pesetas. ¿Qué ventaja hay en emplear uno de los dos combustibles con preferencia al otro?

24. Demostrar que $n(n^2 + 5)$ es un múltiplo de 6, cualquiera que sea el número entero n.

25. Hallar la mayor potencia de 11 que divida á 10 000!

26. Hallar dos números amigos, diferentes de 220 y 284.

27. Demostrar que una de las dos expresiones $(2n+1)!+1$ ó $(2n+1)!-1$ es siempre divisible por un número primo, de la forma $4n+3$.

28. Hallar la condición con la cual deben cumplir dos círculos, dados por sus ecuaciones, para que se pueda trazar un triángulo inscripto en uno y circunscripto al otro.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.