ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 8 AGOSTO 1896

SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó. (*Continuación.*)—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansion. (*Continuación.*)—Movimiento armónico, por P. G. Tait. (*Conclusión.*)—Soluciones de cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

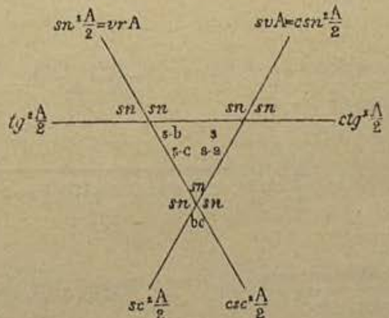
(*Continuación.* Véase pág. 124)

VIII

Resolución de triángulos esférico-oblicuángulos

Para resolver los triángulos esféricos oblicuángulos, en el caso de que sean conocidos los tres lados, proponemos el

Diagrama 16



formado con los senos de los lados b, c del triángulo, con el de la semisuma s de los tres lados, y con los de las diferencias

$s-a$, $s-b$, $s-c$ entre la semisuma indicada y cada uno de los lados a, b, c. De él se derivan las expresiones trigonométricas usuales del cuadrado de la mitad de un ángulo esférico A, y las especiales de Mendoza, que dan el valor directo del ángulo entero.

Aplicando la regla primera, establecida para los triángulos esférico-rectángulos, y las leyes de reciprocidad, obtendremos:

381) $$vr\,\mathrm{A} = \frac{sn(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,sn(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{sn\,\mathrm{b}\,sn\,\mathrm{c}}$$

382) $$vr\,\mathrm{A} = \frac{csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}}{csc(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,csc(\mathrm{s}-\mathrm{c})}$$

383) $$vr\,\mathrm{A} = sn\,(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,sn\,(\mathrm{s}-\mathrm{c})\,csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}$$

384) $$sn^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{sn(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,sn(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{sn\,\mathrm{b}\,sn\,\mathrm{c}}$$

385) $$sn^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}}{csc(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,csc(\mathrm{s}-\mathrm{c})}$$

386) $$sn\,\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{sn(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,sn(\mathrm{s}-\mathrm{c})\,csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}}$$

387) $$tg^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{sn(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,sn(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{sn\,\mathrm{s}\,sn\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}$$

388) $$tg^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{csc\,\mathrm{s}\,csc\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{csc(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,csc(\mathrm{s}-\mathrm{c})}$$

389) $$tg\,\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{sn(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,sn(\mathrm{s}-\mathrm{c})\,csc\,\mathrm{s}\,csc\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}$$

390) $$sc^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{sn\,\mathrm{b}\,sn\,\mathrm{c}}{sn\,\mathrm{s}\,sn\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}$$

391) $$sc^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{csc\,\mathrm{s}\,csc(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}}$$

392) $$sc\,\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{sn\,\mathrm{b}\,sn\,\mathrm{c}\,csc\,\mathrm{s}\,csc\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}$$

393) $$sv\,\mathrm{A} = \frac{sn\,\mathrm{s}\,sn\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{sn\,\mathrm{b}\,sn\,\mathrm{c}}$$

394) $$sv\,\mathrm{A} = \frac{csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}}{csc\,\mathrm{s}\,csc\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}$$

395) $$sv\,\mathrm{A} = sn\,\mathrm{s}\,sn\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})\,csc\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{c}$$

396) $csn^2 \frac{A}{2} = \frac{sn\, s\, sn(s-a)}{sn\, b\, sn\, c}$ 397) $csn^2 \frac{A}{2} = \frac{csc\, b\, csc\, c}{csc\, s\, csc(s-a)}$

398) $csn \frac{A}{2} = \sqrt{sn\, s\, sn\,(s-a)\, csc\, b\, csc\, c}$

399) $ctg^2 \frac{A}{2} = \frac{sn\, s\, sn\,(s-a)}{sn(s-b) sn(s-c)}$ 400) $ctg^2 \frac{A}{2} = \frac{csc(s-b) csc(s-c)}{csc\, s\, csc\,(s-a)}$

401) $ctg \frac{A}{2} = \sqrt{sn\, s\, sn(s-a)\, csc\,(s-b) csc(s-c)}$

402) $csc^2 \frac{A}{2} = \frac{sn\, b\, sn\, c}{sn(s-b) sn(s-c)}$ 403) $csc^2 \frac{A}{2} = \frac{csc(s-b) csc(s-c)}{csc\, b\, csc\, c}$

404) $csc \frac{A}{2} = \sqrt{sn\, b\, sn\, c\, csc\,(s-b)\, csc\,(s-c)}$

Mediante una evolución circular entre las letras a, b, c se encuentran las fórmulas correspondientes al ángulo B.

405) $vr\, B = \frac{sn\,(s-a)\, sn\,(s-c)}{sn\, a\, sn\, c}$ 406) $vr\, B = \frac{csc\, a\, csc\, c}{csc\,(s-a)\, csc(s-c)}$

407) $vr\, B = sn\,(s-a)\, sn\,(s-c)\, csc\, a\, csc\, c$

408) $sn^2 \frac{B}{2} = \frac{sn(s-a) sn(s-c)}{sn\, a\, sn\, c}$ 409) $sn^2 \frac{B}{2} = \frac{csc\, a\, csc\, c}{csc(s-a) csc(s-c)}$

410) $sn \frac{B}{2} = \sqrt{sn\,(s-a)\, sn\,(s-c)\, csc\, a\, csc\, c}$

411) $tg^2 \frac{B}{2} = \frac{sn\,(s-a) sn(s-c)}{sn\, s\, sn\,(s-b)}$ 412) $tg^2 \frac{B}{2} = \frac{csc\, s\, csc\,(s-b)}{csc(s-a) csc(s-c)}$

413) $$tg\,\frac{B}{2} = \sqrt{sn\,(s-a)\,sn\,(s-c)\,csc\,s\,csc\,(s-b)}$$

414) $$sc^2\frac{B}{2} = \frac{sn\,a\,sn\,c}{sn\,s\,sn\,(s-b)}$$ 415) $$sc^2\frac{B}{2} = \frac{csc\,s\,csc\,(s-b)}{csc\,a\,csc\,c}$$

416) $$sc\frac{B}{2} = \sqrt{sn\,a\,sn\,c\,csc\,s\,csc\,(s-b)}$$

417) $$sv\,B = \frac{sn\,s\,sn\,(s-b)}{sn\,a\,sn\,c}$$ 418) $$sv\,B = \frac{csc\,a\,csc\,c}{csc\,s\,csc\,(s-b)}$$

419) $$sv\,B = sn\,s\,sn\,(s-b)\,csc\,a\,csc\,c$$

420) $$csn^2\,\frac{B}{2} = \frac{sn\,s\,sn\,(s-b)}{sn\,a\,sn\,c}$$ 421) $$csn^2\,\frac{B}{2} = \frac{csc\,a\,csc\,c}{csc\,s\,csc\,(s-b)}$$

422) $$csn\,\frac{B}{2} = \sqrt{sn\,s\,sn\,(s-b)\,csc\,a\,csc\,c}$$

423) $$ctg^2\,\frac{B}{2} = \frac{sn\,s\,sn(s-b)}{sn(s-a)\,sn(s-c)}$$ 424) $$ctg^2\frac{B}{2} = \frac{csc(s-a)\,csc(s-c)}{csc\,s\,csc\,(s-b)}$$

425) $$ctg\,\frac{B}{2} = \sqrt{sn\,s\,sn\,(s-b)\,csc\,(s-a)\,csc\,(s-c)}$$

426) $$csc\,\frac{B}{2} = \frac{sn\,a\,sn\,c}{sn(s-a)\,sn(s-c)}$$ 427) $$csc^2\,\frac{B}{2} = \frac{csc\,(s-a)\,csc\,(s-c)}{csc\,a\,csc\,c}$$

428) $$csc\,\frac{B}{2} = \sqrt{sn\,a\,sn\,c\,csc\,(s-a)\,csc\,(s-c)}$$

Por nueva evolución circular entre las letras *a*, *b*, *c* se hallan las fórmulas correspondientes al ángulo C.

429) $vr\,C = \dfrac{sn(s-a)\,sn(s-b)}{sn\,a\,sn\,b}$ 430) $vr\,C = \dfrac{csc\,a\,csc\,b}{csc(s-a)\,csc(s-b)}$

431) $vr\,C = sn(s-a)\,sn(s-b)\,csc\,a\,csc\,b$

432) $sn^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{sn(s-a)\,sn(s-b)}{sn\,a\,sn\,b}$ 433) $sn^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{csc\,a\,csc\,b}{csc(s-a)\,csc(s-b)}$

434) $sn\dfrac{C}{2} = \sqrt{sn(s-a)\,sn(s-b)\,csc\,a\,csc\,b}$

435) $tg^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{sn(s-a)\,sn(s-b)}{sn\,s\,sn(s-c)}$ 436) $tg^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{csc\,s\,csc(s-c)}{csc(s-a)\,csc(s-b)}$

437) $tg\dfrac{C}{2} = \sqrt{sn(s-a)\,sn(s-b)\,csc\,s\,csc(s-c)}$

438) $sc^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{sn\,a\,sn\,b}{sn\,s\,sn(s-c)}$ 439) $sc^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{csc\,s\,csc(s-c)}{csc\,a\,csc\,b}$

440) $sc\dfrac{C}{2} = \sqrt{sn\,a\,sn\,b\,csc\,s\,csc(s-c)}$

441) $sv\,C = \dfrac{sn\,s\,sn(s-c)}{sn\,a\,sn\,b}$ 442) $sv\,C = \dfrac{csc\,a\,csc\,b}{csc\,s\,csc(s-c)}$

443) $sv\,C = sn\,s\,sn(s-c)\,csc\,a\,csc\,b$

444) $csn^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{sn\,s\,sn(s-c)}{sn\,a\,sn\,b}$ 445) $csn^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{csc\,a\,csc\,b}{csc\,s\,csc(s-c)}$

446) $csn\dfrac{C}{2} = \sqrt{sn\,s\,sn(s-c)\,csc\,a\,csc\,b}$

447) $ctg^2\frac{C}{2}=\frac{sn\,s\,sn(s-c)}{sn(s-a)sn(s-b)}$ 448) $ctg^2\frac{C}{2}=\frac{csc(s-a)csc(s-b)}{csc\,s\,csc(s-c)}$

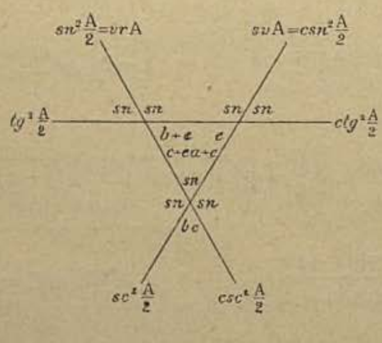
449) $ctg\frac{C}{2}=\sqrt{sn\,s\,sn(s-c)csc(s-a)csc(s-b)}$

450) $csc^2\frac{C}{2}=\frac{sn\,a\,sn\,b}{sn(s-a)sn(s-b)}$ 451) $csc^2\frac{C}{2}=\frac{csc(s-a)csc(s-b)}{csc\,a\,csc\,b}$

452) $csc\frac{C}{2}=\sqrt{sn\,a\,sn\,b\,csc(s-a)csc(s-b)}$

También pueden resolverse los triángulos esféricos oblicuángulos, en el caso de que sean conocidos los tres lados, mediante el

Diagrama 17



formado con los senos de los lados b, c del triángulo, con el del semiexceso e de 360° sobre la suma de los tres lados, y con los de las sumas $a+e$, $b+e$, $c+e$ de cada uno de los lados a, b, c y el semiexceso indicado. De él se derivan las expresiones trigonométricas generales del cuadrado de la mitad de un ángulo esférico A, y las especiales de Mendoza, que dan el valor directo del ángulo entero.

Aplicando las mismas reglas que en el diagrama anterior, obtendremos:

453) $vr\,A = \dfrac{sn(b+e)\,sn(c+e)}{sn\,b\,sn\,c}$

454) $vr\,A = sn(b+e)\,sn(c+e)\,csc\,b\,csc\,c$

455) $sn^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{sn(b+e)\,sn(c+e)}{sn\,b\,sn\,c}$

456) $sn\dfrac{A}{2} = \sqrt{sn(b+e)\,sn(c+e)\,csc\,b\,csc\,c}$

457) $tg^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{sn(b+e)\,sn(c+e)}{sn\,e\,sn(a+e)}$

458) $tg\dfrac{A}{2} = \sqrt{sn(b+e)sn(c+e)\,csc\,e\,csc(a+e)}$

459) $sc^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{sn\,b\,sn\,c}{sn\,e\,sn(a+e)}$

460) $sc\dfrac{A}{2} = \sqrt{sn\,b\,sn\,c\,csc\,e\,csc(a+e)}$

461) $sv\,A = \dfrac{sn\,e\,sn(a+e)}{sn\,b\,sn\,c}$ 462) $sv\,A = sn\,e\,sn(a+e)\,csc\,b\,csc\,c$

463) $csn^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{sn\,e\,sn(a+e)}{sn\,b\,sn\,c}$

464) $csn\dfrac{A}{2} = \sqrt{sn\,e\,sn(a+e)\,csc\,b\,csc\,c}$

465) $ctg^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{sn\,e\,sn(a+e)}{sn(b+e)sn(c+e)}$

466) $ctg\dfrac{A}{2} = \sqrt{sn\,e\,sn(a+e)csc(b+e)csc(c+e)}$

467) $csc^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{sn\,b\,sn\,c}{sn(b+e)sn(c+e)}$

468) $csc\dfrac{A}{2} = \sqrt{sn\,b\,sn\,c\,csc(b+e)csc(c+e)}$

Las fórmulas correspondientes al ángulo B se obtienen por evolución circular entre las letras a, b, c, y son

$$469)\quad vr\,\mathrm{B}=\frac{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}}$$

$$470)\quad vr\,\mathrm{B}=sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{c}$$

$$471)\quad sn^2\frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}}$$

$$472)\quad sn\,\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{c}}$$

$$473)\quad tg^2\frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$$

$$474)\quad tg\,\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{e}\,csc(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$$

$$475)\quad sc^2\frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{sn\,\mathrm{a}\,sn\,c}{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$$

$$476)\quad sc\,\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}\,csc\,\mathrm{e}\,csc(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$$

$$477)\quad sv\,\mathrm{B}=\frac{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}}\qquad 478)\quad sv\,\mathrm{B}=sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{c}$$

$$479)\quad csn^2\frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}}\qquad 480)\quad csn\,\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{c}}$$

$$481)\quad ctg^2\frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})}{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$$

$$482)\quad ctg\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{sn\,\mathrm{e}\,sn(\mathrm{b}+\mathrm{e})\,csc(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,csc(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$$

$$483)\quad csc^2\frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}}{sn(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$$

$$484)\quad csc\,\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{c}\,csc(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,csc(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$$

Las fórmulas correspondientes al ángulo C se hallan por nueva evolución circular entre las letras a, b, c, y son

485) $vr\,\mathrm{C} = \dfrac{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}}$

486) $vr\,\mathrm{C} = sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{b}$

487) $sn^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \dfrac{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}}$

488) $sn\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{b}}$

489) $tg^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \dfrac{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$

490) $tg\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{e}\,csc\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$

491) $sc^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \dfrac{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}}{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$

492) $sc\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}\,csc\,\mathrm{e}\,csc\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}$

493) $sv\,\mathrm{C} = \dfrac{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}}$ 494) $sv\,\mathrm{C} = sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{b}$

495) $csn^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \dfrac{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}}$ 496) $csn\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})\,csc\,\mathrm{a}\,csc\,\mathrm{b}}$

497) $ctg^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \dfrac{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})}{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$

498) $ctg\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{sn\,\mathrm{e}\,sn\,(\mathrm{c}+\mathrm{e})\,csc\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,csc\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$

499) $csc^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \dfrac{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}}{sn\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,sn\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$

500) $csc\dfrac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{sn\,\mathrm{a}\,sn\,\mathrm{b}\,csc\,(\mathrm{a}+\mathrm{e})\,csc\,(\mathrm{b}+\mathrm{e})}$

(Se continuará.)

---

*

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 127)

20. *Propiedades de la hipérbola.* En gran número de casos es ventajoso reemplazar la ecuación usual de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

por las ecuaciones simultáneas, en las que θ es un ángulo auxiliar,

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta.$$

Igualmente, para estudiar la hipérbola que tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es á veces útil poner, para la semi-hipérbola de la derecha

$$x = a \operatorname{Ch} t, \quad y = b \operatorname{Sh} t,$$

y para la de la izquierda

$$x = -a \operatorname{Ch} t, \quad y = b \operatorname{Sh} t.$$

Demostremos, por ejemplo, mediante la variable auxiliar t, los dos teoremas de Apolonio. El semi-diámetro a' que tiene por extremidad el punto ($x' = a \operatorname{Ch} t$, $y' = b \operatorname{Sh} t$) está dado por la fórmula

$$a' = \sqrt{a^2 \operatorname{Ch}^2 t + b^2 \operatorname{Sh}^2 t}$$

y el ángulo ω que este diámetro hace con el eje de las x es tal que

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \operatorname{Th} t, \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{b \operatorname{Sh} t}{a'}, \quad \cos \omega = \frac{a \operatorname{Ch} t}{b'}.$$

El coeficiente de dirección de la tangente en el punto (x', y') es

$$\operatorname{tang} \omega' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{b}{a} \operatorname{Coth} t;$$

este coeficiente es también el coeficiente de dirección del diámetro b', conjugado de a'. Obtiénese la longitud de b' buscando la distancia del origen al punto de intersección de la recta

$$y = x \operatorname{tang} \omega', \quad \text{ó} \quad y = \frac{b}{a} \operatorname{Coth} t,$$

con la hipérbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

conjugada de la primera. Para las coordenadas x'', y'' de este punto se encuentran los valores

$$y'' = b \operatorname{Ch} t, \quad x'' = a \operatorname{Sh} t.$$

De consiguiente

$$b' = \sqrt{a^2 \operatorname{Sh}^2 t + b^2 \operatorname{Ch}^2 t},$$

además

$$\operatorname{sen} \omega' = \frac{b \operatorname{Ch} t}{b'}, \qquad \cos \omega' = \frac{a \operatorname{Sh} t}{b'}.$$

Se tiene pues

$$\operatorname{sen}(\omega' - \omega) = \operatorname{sen} \omega' \cos \omega - \operatorname{sen} \omega \cos \omega' = \frac{ba(\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t)}{b' a'} = \frac{ab}{a'b'}$$

$$a'^2 - b'^2 = a^2 \operatorname{Ch}^2 t + b^2 \operatorname{Sh}^2 t - (a^2 \operatorname{Sh}^2 t + b^2 \operatorname{Ch}^2 t) = a^2 - b^2,$$

es decir los teoremas de Apolonio.

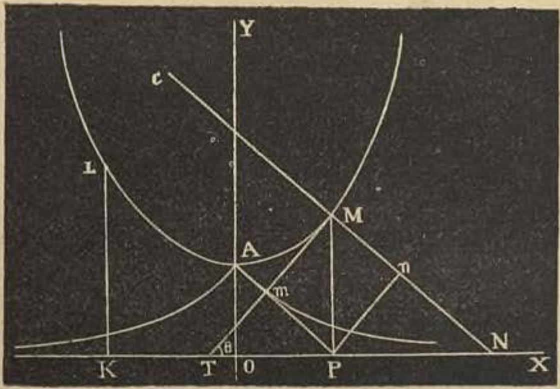
21. *Catenaria.* La catenaria es la curva formada por un hilo pesado suspendido por sus dos extremidades. Tiene por ecuación, en coordenadas rectangulares,

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a},$$

de manera que

$$y' = \operatorname{Sh} \frac{x}{a}, \quad y'' = \frac{1}{a} \operatorname{Ch} \frac{x}{a}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{Ch} \frac{x}{a}.$$

El eje de las x se llama la *directriz* de la curva; el eje de las y es un eje de simetría, que encuentra á la curva en el vértice A, distante de la directriz una longitud igual á a.



La tangente MT y la normal MN en el punto M (x, y), tienen respectivamente por ecuaciones

$$Y - a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} = \operatorname{Sh} \frac{x}{a} (X - x), \quad Y - a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} = \frac{1}{\operatorname{Sh} \frac{x}{a}} (X - x).$$

La distancia Pm del pie de la ordenada de M á la tangente es constante é igual á a. En efecto

$$Pm = \frac{-a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}}{-\sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 \frac{x}{a}}} = a.$$

Por consiguiente, la distancia Pn = Mm de P á la normal MN es igual á $\sqrt{(y^2 - a^2)} = a \operatorname{Sh} \frac{x}{a}$. De aquí un medio fácil de construir la tangente y la normal.

Para la longitud N de la normal MN y para el radio de curvatura $\rho = MC$ se encuentra el mismo valor. Pues

$$N = y\sqrt{1 + y'^2} = a \operatorname{Ch}^2 \frac{x}{a},$$

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \operatorname{Ch}^3 \frac{x}{a} : \frac{1}{a} \operatorname{Ch} \frac{x}{a} = a \operatorname{Ch}^2 \frac{x}{a}.$$

La longitud del arco AM y el área del trapecio curvilíneo AMPO están dadas por las fórmulas

$$\mathrm{AM} = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^x \operatorname{Ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{Sh} \frac{x}{a} = \mathrm{M}m = \mathrm{P}n,$$

$$\mathrm{AMPO} = \int_0^x y\, dx = a\int_0^x \operatorname{Ch} \frac{x}{a}\, dx = a^2 \operatorname{Sh} \frac{x}{a} = a \times \mathrm{M}m = \mathrm{P}m\,\mathrm{M}n,$$

resultados que son muy notables.

Sean x_s y_s las coordenadas del centro de gravedad del arco $s = \mathrm{LM}$ terminado en los puntos L (x_0, y_0), M (x, y); x_u, y_u las del centro de gravedad del cuadrilátero curvilíneo $u = as = \mathrm{LMPK}$ correspondiente. Se tendrá

$$x_s = \frac{1}{s}\int_{x_0}^x x\, ds = \frac{1}{as}\int_{x_0}^x x\, a\, ds = \frac{1}{u}\int_{x_0}^x x\, du = x_u,$$

$$y_s = \frac{1}{s}\int_{x_0}^x y\, ds = \frac{1}{as}\int_{x_0}^x y\, a\, ds = \frac{2}{u}\int_{x_0}^x \frac{y}{2}\, du = 2\, y_u.$$

El centro de gravedad del área u *está* pues *en el medio de la ordenada del centro de gravedad del arco* s.

Se prueba fácilmente que $x_s = x_u$ es la abscisa del punto de intersección de las tangentes en L y M; puesto que $y_s = 2y_u$ es la mitad de la ordenada del punto de intersección de las normales en L y M.

(Se continuará.)

MOVIMIENTO ARMÓNICO

(*Conclusión.* Véase pág. 135.)

12. Cuando los períodos de los dos movimientos componentes sean no iguales, pero casi iguales, la fase del uno se adelantará paulatinamente á la del otro, y el camino descrito irá trazando de un modo continuo todas las elipses posibles y conservará las propiedades comunes á todas ellas. Será una especie de espiral que á cada vuelta tocará sucesivamente los cuatro lados del antedicho cuadrado ó rectángulo.

13. Por razonamiento semejante al que arriba empleamos, se echará de ver que, concurriendo cualquier número de movimientos armónicos sencillos en direcciones cualesquiera, con arbitrarias amplitudes y diferencias de fase, con tal que todos esos movimientos tengan igual período, el movimiento resultante se realizará en una elipse, en torno del centro de la misma. Pero ésto se prueba más fácilmente por medio del cálculo.

En efecto, si en la recta cuyos cosenos directivos, con relación á los tres ejes de coordenadas, son l, m, n, se realiza un movimiento armónico sencillo expresado por

$$\xi = a \cos (\omega t + \varepsilon),$$

los movimientos componentes paralelos á los tres ejes darán espacios representados por $l\xi$, $m\xi$ y $n\xi$. Luego, si todos esos movimientos poseen igual período, el movimiento resultante de los componentes paralelos al eje de las x dará

$$x = \Sigma \left| al \cos (\omega t + \varepsilon) \right| =$$

$$= \cos \omega t . \Sigma (al \cos \varepsilon) - \operatorname{sen} \omega t . \Sigma (al \operatorname{sen} \varepsilon).$$

Tendremos, por tanto, tres ecuaciones de la forma

$$x = \mathrm{A} \cos \omega t - \mathrm{A}' \operatorname{sen} \omega t,$$

$$y = \mathrm{B} \cos \omega t - \mathrm{B}' \operatorname{sen} \omega t,$$

$$z = \mathrm{C} \cos \omega t - \mathrm{C}' \operatorname{sen} \omega t.$$

Mas si se eligen tres números λ, μ, ν, tales que

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

$$\lambda A' + \mu B' + \nu C' = 0,$$

se tendrá también

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0.$$

Pero las dos ecuaciones anteriores dan sin ambigüedad las relaciones de μ y ν á λ. Luego la última ecuación representa un plano definido. En él se efectúa el movimiento resultante. Eligiendo ese plano por el de las x é y, se anula el valor de z dado por la tercera de las ecuaciones de las coordenadas, y eliminando t entre las dos primeras, es decir, las de x é y, resulta la ecuación de una elipse.

14. Cuando los períodos de los movimientos armónicos sencillos no son iguales, se tiene

$$x = a \cos(\omega t + \varepsilon), \qquad y = a' \cos(\omega' t + \varepsilon').$$

Es fácil trazar por puntos la curva correspondiente, pero exceptuando el caso en que haya entre ω y ω' una relación numérica sencilla, no podrá presentarse como algébrica la ecuación que ligue x con y. Si es $2\omega' = \omega$, cabe mudar la época de manera que las ecuaciones se escriban de este modo:

$$x = a \cos(2\omega' t + \alpha), \qquad y = a' \cos \omega' t.$$

Desarrollando el segundo miembro de la primera ecuación, y sustituyendo en ese desarollo los valores de $\cos \omega' t$ y de $\operatorname{sen} \omega' t$ deducidos de la segunda, se eliminará t y resultará con ello la ecuación

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{2y^2}{a'^2} - 1\right) \cos \alpha - \frac{2y}{a'} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a'^2}} \operatorname{sen} \alpha,$$

que representa en general una curva de cuarto grado, parecida á un 8 de ojos más ó menos cerrados, como se ve en las cuatro primeras formas de la figura 6; pero cuando $\alpha = n\pi$,

Fig. 6

dichos ojos desaparecen y la figura se convierte en un trozo de parábola, con el vértice á la derecha ó á la izquierda, según que n sea impar ó par. Corresponde en el presente caso tal parábola á la recta del caso descrito en el párrafo 13. Cuando los períodos discrepan muy poco de la razón 2 : 1, aparecen en la trayectoria sucesivamente las formas mencionadas, yendo y viniendo el punto por cada una de ellas; y cada vez que descrita la forma parabólica, comienza á entreabrirse, se traza la forma de 8 en sentido contrario al seguido cuando se trazó esta misma forma antes de cerrarse la trayectoria en parábola.

15. Bastan los principios expuestos para estudiar cualquier ejemplo de esta clase de movimientos. Pero uno ó dos casos particulares merecen mención especial. Ya queda examinado en el párrafo 5 el caso de dos movimientos circulares uniformes efectuados en un plano con iguales períodos. En la figura 3 describe el punto P su circunferencia en torno de O, traza Q la suya alrededor de P, y de ambos movimientos resulta uno circular uniforme del punto Q en torno de O. El radio de este último, según lo que valga la diferencia de fase, puede ser igual á la suma ó diferencia de los radios de los movimientos componentes ó poseer un valor intermedio entre dichos radios. Cuando los períodos no son enteramente iguales, el movimiento puede suponerse efectuado en una circunferencia cuyo radio oscila de un modo continuo entre los límites mencionados, y la trayectoria resultante es una especie de espiral comprendida entre dos circunferencias concéntricas trazadas con los antedichos radios.

Pero cuando los movimientos circulares componentes llevan opuesto sentido, ofrecen un movimiento resultante de tanto interés como importancia. Claro es, que ahora habrá posiciones en que OP y PQ estén en una misma recta. Pero si OA con AB, (figura 7), es una de estas posiciones, en cualquiera otra estarán OP y PQ igualmente inclinadas respecto de OA. El punto Q describirá una elipse cuyo semieje mayor OB será la suma de los radios, y cuyo semieje menor equivaldrá á la diferencia. Por lo tanto, si los radios son iguales, re-

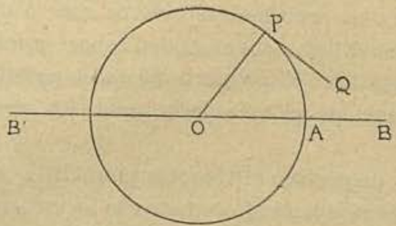


Fig. 7

sultará un movimiento armónico sencillo según la recta OBB′; y con ésto queda demostrada una proposición de grandísima importancia en Óptica, á saber, que puede mirarse todo movimiento armónico sencillo como resultante de dos movimientos circulares iguales y opuestos, realizados en un plano. Si los radios fueran iguales, pero los períodos no enteramente iguales, podría reputarse el movimiento como armónico sencillo efectuado en una recta que girara en un plano con velocidad angular uniforme. En tal caso se hallan el péndulo de Foucault y la luz polarizada en un plano cuando cruza según el eje de un cristal de cuarzo ó á través de un trozo de vidrio ó de otra materia transparente en el campo magnético.

16. Cuando concurren movimientos circulares uniformes realizados con distintos períodos, se producen trayectorias en forma de epicicloides, etc. Entre estas combinaciones, como caso particular, figura la de un movimiento circular con otro rectilíneo, ambos uniformes, los cuales dan cicloides, etc. Pero no hacemos aquí más que mencionar tales movimientos.

17. Compéndianse las aplicaciones más importantes del análisis armónico sencillo en el siguiente

Teorema de Fourier. *Una función armónica compleja, aumentada con un término constante, es la expresión propia de toda* *función periódica de un sólo valor, y puede,* por tanto, *expresar cualquier función de un sólo valor entre valores dados de la variable.*

Bastará un sólo ejemplo para que se eche de ver cuán importante es tal teorema en el estudio de los problemas de Física. La propiedad más señalada, ó rasgo característico, de un sonido musical es su *periodicidad.* Luego puede descomponerse este sonido en una serie de movimientos armónicos sencillos. Mas los períodos respectivos son el período fundamental, y submúltiplos del mismo, á saber, la mitad, el tercio, la cuarta parte, etc. El primero de estos períodos, es decir, el fundamental, da el tono de la nota; los otros forman su timbre.

No para demostrar el teorema enunciado, sino para que se comprenda rápidamente como pudo ocurrirse, exponemos el siguiente razonamiento.

Revélase la periodicidad de una función f en que la igualdad

$$f\left(x + \frac{1}{2}a\right) = f\left(x - \frac{1}{2}a\right),$$

en la cual se designa por a el período, subsiste, cualquiera que sea x, Pero aplicando la notación simbólica usada en el cálculo infinitesimal, se tiene, llamando e la base de logaritmos neperianos,

$$f(x+h) = \left(1 + h\frac{d}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2}{dx^2} + \ldots\right) f(x) = e^{h\frac{d}{dx}} f(x);$$

luego aquella igualdad se escribirá simbólicamente de este modo

$$e^{\frac{a}{2}\frac{d}{dx}} f(x) = e^{-\frac{a}{2}\frac{d}{dx}} f(x),$$

ó bien

$$\left\{ e^{\frac{a}{2}\frac{d}{dx}} - e^{-\frac{a}{2}\frac{d}{dx}} \right\} f(x) = 0.$$

Ésto sentado, nótese que la ecuación

$$e^{\frac{1}{2}\xi} - e^{-\frac{1}{2}\xi} = 0$$

posee una raiz real

$$\xi = 0,$$

y una serie indefinida de pares de raíces imaginarias dadas por la expresión

$$\frac{1}{2}\xi = \pm i\pi\sqrt{-1}$$

en la cual representa i un número entero. Será, pues,

$$e^{\frac{1}{2}\xi} - e^{-\frac{1}{2}\xi} = \xi\left(1 + \frac{\xi^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\xi^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\xi^2}{6^2\pi^2}\right)\ldots;$$

y por tanto, la ecuación diferencial que á $f(x)$ se refiere, dará, además de un término constante, una serie indefinida de términos procedentes de las soluciones de ecuaciones de segundo grado, cuyo tipo será

$$\left\{\frac{a^2}{2^2 i^2 \pi^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1\right\} f(x) = 0.$$

Mas la solución de esta ecuación representativa dará de la ecuación completa la siguiente integral particular

$$f(x) = P_i \cos\left(\frac{2\,i\,\pi\,x}{a} + Q_i\right).$$

Luego la solución general será

$$f(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} P_i \cos\left(\frac{2\,i\,\pi\,x}{a} + Q_i\right)$$

$$= A_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos\frac{2\,i\,\pi\,x}{a} + \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i \operatorname{sen}\frac{2\,i\,\pi\,x}{a},$$

y por integración especial podremos hallar las constantes de tal expresión.

Como ejemplo sencillo supóngase que, conforme acontece al calentar y enfriar alternativamente la superficie de un sólido, ó al establecer y cortar alternativamente la corriente eléctrica en una batería y en un alambre telegráfico, ó en otros muchos casos, $f(x)$ valga la unidad desde $x = 0$ hasta $x = a$, y cero desde $x = a$ hasta $x = 2a$. Será entonces

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{2i+1} \operatorname{sen}\frac{(2i+1)\,\pi\,x}{a}.$$

SOLUCIONES DE CUESTIONES PROPUESTAS

CUESTIÓN 24

Demostrar que $n(n^2 + 5)$ es un múltiplo de 6, cualquiera que sea el número entero n.

SOLUCIÓN

Dos casos pueden ocurrir en la cuestión propuesta: que n sea múltiplo de 6 ó que no lo sea.

En el primer caso el teorema está demostrado.

En el segundo n estará comprendido en una de las expresiones $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$, $a + 5$, ó $a \pm 1$, $a \pm 2$, $a \pm 3$, siendo a un múltiplo de 6. Esto sentado observemos que

$$n^2 + 5 = (a \pm 1)^2 + 5 = a^2 \pm 2\,a + 6,$$

luego cuando n es de la forma $a \pm 1$ queda demostrado el teorema.

Si n es de la forma $a \pm 2$, tendremos

$$n(n^2 + 5) = n^3 + 5\,n = a^3 \pm 6\,a^2 + 17\,a \pm 18,$$

expresión cuyo segundo miembro es múltiplo de 6, luego el primero también lo ha de ser: el teorema es, pues, cierto cuando $n = a \pm 2$.

Si n es de la forma $a \pm 3$ tendremos

$$n(n^2 + 5) = n^3 + 5\,n = a^3 \pm 9\,a^2 + 32\,a \pm 42,$$

expresión que es divisible por 6, luego el teorema es cierto en todos los casos.

José LLUCH MELÉNDEZ,
Alumno de la Facultad de Ciencias de Valencia.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.