ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 6 JUNIO 1896

SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó. (*Continuación.*)—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansion. (*Continuación.*)—Puntos de inflexión de la curva en que se convierte la sección plana de un cono, al desarrollar éste sobre un plano, por F. Balitrand.—Del plagiógrafo ó pantógrafo, por J. J. Sylvester.—Movimiento armónico, por P. G. Tait.—Soluciones de cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

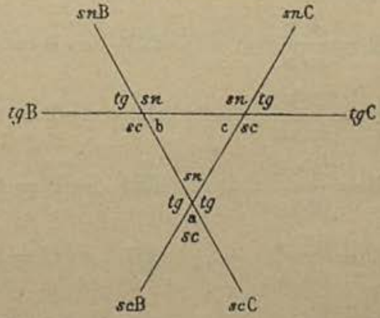
(*Continuación.* Véase pág. 85)

VII

Resolución de triángulos esférico-rectángulos

Para resolver los triángulos esféricos rectángulos, en todos los casos que pueden ocurrir, proponemos el

Diagrama 12



formado con los números trigonométricos de los ángulos oblícuos B, C, y de los elementos lineales a, b, c del triángulo.

De él se derivan las relaciones que ligan tres á tres los elementos del triángulo esférico rectángulo, mediante las reglas siguientes:

Un elemento extremo del diagrama es igual al cociente de los dos que le son consecutivos en su recta.

Un elemento intermedio es igual al producto de los dos que le son adyacentes en su recta; y es también igual al cociente de los dos que le son consecutivos en dicha recta.

La secante del elemento inferior del triángulo es igual al producto de las secantes de los dos elementos superiores.

La secante de uno de los elementos superiores es igual al cociente de secantes del elemento inferior y del superior adyacente al primero.

La secante de un elemento cualquiera del triángulo es igual al producto de los extremos de la recta opuesta á dicho elemento.

Es de advertir que, al hacer uso de las dos primeras reglas, debe atribuirse á cada elemento lineal el número trigonométrico que se encuentre en la parte superior de su recta y en el ángulo más próximo al elemento extremo que entre en la relación que se construye; y si tal ángulo se encuentra ocupado por el elemento, hay que dar á éste el número trigonométrico que se encuentre en el ángulo opuesto por el vértice.

Aplicando estas reglas, y haciendo uso de las leyes de reciprocidad para dar forma entera á los resultados fraccionarios trigonométricos, obtendremos:

221) $sn\,\mathrm{B} = \dfrac{sn\,\mathrm{b}}{sn\,\mathrm{a}}$ 222) $sn\,\mathrm{B} = sn\,\mathrm{b}\;csc\,\mathrm{a}$

223) $tg\,\mathrm{B} = \dfrac{tg\,\mathrm{b}}{sn\,\mathrm{c}}$ 224) $tg\,\mathrm{B} = tg\,\mathrm{b}\;csc\,\mathrm{c}$

225) $sc\,\mathrm{B} = \dfrac{tg\,\mathrm{a}}{tg\,\mathrm{c}}$ 226) $sc\,\mathrm{B} = tg\,\mathrm{a}\;ctg\,\mathrm{c}$

227) $sn\,\mathrm{C} = \dfrac{sn\,\mathrm{c}}{sn\,\mathrm{a}}$ 228) $sn\,\mathrm{C} = sn\,\mathrm{c}\;csc\,\mathrm{a}$

229) $tg\,\mathrm{C} = \dfrac{tg\,\mathrm{c}}{sn\,\mathrm{b}}$ 230) $tg\,\mathrm{C} = tg\,\mathrm{c}\;csc\,\mathrm{b}$

231) $sc\,\mathrm{C} = \dfrac{tg\,\mathrm{a}}{tg\,\mathrm{b}}$ 232) $sc\,\mathrm{C} = tg\,\mathrm{a}\;ctg\,\mathrm{b}$

233) $sn\,b = sn\,a\,sn\,B$ 234) $sn\,b = \frac{tg\,c}{tg\,C}$ 235) $sn\,b = tg\,c\,ctg\,C$

236) $tg\,b = sn\,c\,tg\,B$ 237) $tg\,b = \frac{tg\,a}{sc\,C}$ 238) $tg\,b = tg\,a\,csn\,C$

239) $sn\,c = sn\,a\,sn\,C$ 240) $sn\,c = \frac{tg\,b}{tg\,B}$ 241) $sn\,c = tg\,b\,ctg\,B$

242) $tg\,c = sn\,b\,tg\,C$ 243) $tg\,c = \frac{tg\,a}{sc\,B}$ 244) $tg\,c = tg\,a\,csn\,B$

245) $sn\,a = \frac{sn\,b}{sn\,B}$ 246) $sn\,a = sn\,b\,csc\,B$

247) $sn\,a = \frac{sn\,c}{sn\,C}$ 248) $sn\,a = sn\,c\,csc\,C$

249) $tg\,a = tg\,b\,sc\,C$ 250) $tg\,a = tg\,c\,sc\,B$

251) $sc\,a = sc\,b\,sc\,c$ 252) $sc\,b = \frac{sc\,a}{sc\,c}$ 253) $sc\,b = sc\,a\,csn\,c$

254) $sc\,c = \frac{sc\,a}{sc\,b}$ 255) $sc\,c = sc\,a\,csn\,b$

256) $sc\,a = tg\,B\,tg\,C$ 257) $tg\,B = \frac{sc\,a}{tg\,C}$ 258) $tg\,B = sc\,a\,ctg\,C$

259) $tg\,C = \frac{sc\,a}{tg\,B}$ 260) $tg\,C = sc\,a\,ctg\,B$

261) $sc\,b = sn\,C\,sc\,B$ 262) $sn\,C = \frac{sc\,b}{sc\,B}$ 263) $sn\,C = sc\,b\,csn\,B$

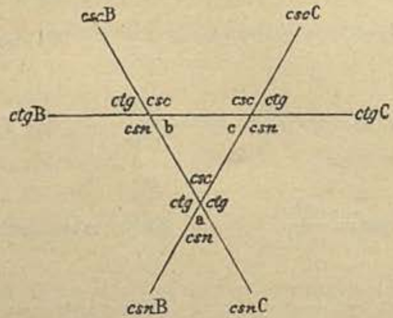
264) $sc\,B = \frac{sc\,b}{sn\,C}$ 265) $sc\,B = sc\,b\,csc\,C$

266) $sc\,c = sn\,B\,sc\,C$ 267) $sn\,B = \frac{sc\,c}{sc\,C}$ 268) $sn\,B = sc\,c\,csn\,C$

269) $sc\,C = \frac{sc\,c}{sn\,B}$ 270) $sc\,C = sc\,c\,csc\,B$

También pueden resolverse los triángulos esféricos rectángulos mediante el

Diagrama 13



recíproco del 12, y formado con los números trigonométricos de los ángulos oblícuos B, C, y de los elementos lineales *a*, *b*, *c* del triángulo.

Aplicando las reglas establecidas para el diagrama 12, pero reemplazando secantes por cosenos en las tres últimas, obtendremos:

271) $csc\ \mathrm{B} = \dfrac{csc\ \mathrm{b}}{csc\ \mathrm{a}}$ 272) $csc\ \mathrm{B} = csc\ \mathrm{b}\ sn\ \mathrm{a}$

273) $ctg\ \mathrm{B} = \dfrac{ctg\ \mathrm{b}}{csc\ \mathrm{c}}$ 274) $ctg\ \mathrm{B} = ctg\ \mathrm{b}\ sn\ \mathrm{c}$

275) $csn\ \mathrm{B} = \dfrac{ctg\ \mathrm{a}}{ctg\ \mathrm{c}}$ 276) $csn\ \mathrm{B} = ctg\ \mathrm{a}\ tg\ \mathrm{c}$

277) $csc\ \mathrm{C} = \dfrac{csc\ \mathrm{c}}{csc\ \mathrm{a}}$ 278) $csc\ \mathrm{C} = csc\ \mathrm{c}\ sn\ \mathrm{a}$

279) $ctg\ \mathrm{C} = \dfrac{ctg\ \mathrm{c}}{csc\ \mathrm{b}}$ 280) $ctg\ \mathrm{C} = ctg\ \mathrm{c}\ \mathrm{sn}\ \mathrm{b}$

281) $csn\ \mathrm{C} = \dfrac{ctg\ \mathrm{a}}{ctg\ \mathrm{b}}$ 282) $csn\ \mathrm{C} = ctg\ \mathrm{a}\ tg\ \mathrm{b}$

283) $csc\,b = csc\,a\,csc\,B$ 284) $csc\,b = \dfrac{ctg\,c}{ctg\,C}$ 285) $csc\,b = ctg\,c\,tg\,C$

286) $ctg\,b = csc\,c\,ctg\,B$ 287) $ctg\,b = \dfrac{ctg\,a}{csn\,C}$ 288) $ctg\,b = ctg\,a\,sc\,C$

289) $csc\,c = csc\,a\,csc\,C$ 290) $csc\,c = \dfrac{ctg\,b}{ctg\,B}$ 291) $csc\,c = ctg\,b\,tg\,B$

292) $ctg\,c = csc\,b\,ctg\,C$ 293) $ctg\,c = \dfrac{ctg\,a}{csn\,B}$ 294) $ctg\,c = ctg\,a\,sc\,B$

295) $csc\ a = \dfrac{csc\ b}{csc\ B}$ 296) $csc\ a = csc\ b\ sn\ B$

297) $csc\ a = \dfrac{csc\ c}{csc\ C}$ 298) $csc\ a = csc\ c\ sn\ C$

299) $ctg\ a = ctg\ b\ csn\ C$ 300) $ctg\ a = ctg\ c\ csn\ C$

301) $csn\,a = csn\,b\,cns\,c$ 302) $csn\,b = \dfrac{csn\,a}{csn\,c}$ 303) $csn\,b = csn\,a\,sc\,c$

304) $csn\,c = \dfrac{csn\,a}{csn\,b}$ 305) $csn\,c = csn\,a\,sc\,b$

306) $csn\,a = ctg\,B\,ctg\,C$ 307) $ctg\,B = \dfrac{csn\,a}{ctg\,C}$ 308) $ctg\,B = csn\,a\,tg\,C$

309) $ctg\,C = \dfrac{csn\,a}{ctg\,B}$ 310) $ctg\,C = csn\,a\,tg\,B$

311) $csn\,b = csc\,C\,csn\,B$ 312) $csc\,C = \dfrac{csn\,b}{csn\,B}$ 313) $csc\,C = csn\,b\,sc\,B$

314) $csn\,B = \dfrac{csn\,b}{csc\,C}$ 315) $csn\,B = csn\,b\,sn\,C$

316) $csn\,c = csc\,B\,csn\,C$ 317) $csc\,B = \dfrac{csn\,c}{csn\,C}$ 318) $csc\,B = csn\,c\,sc\,C$

319) $csn\,C = \dfrac{csn\,c}{csc\,B}$ 320) $csn\,C = csn\,c\,sn\,B$

(Se continuará.)

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación*. Véase pág. 88)

Se tiene también, para x^2 inferior á 1,

$$l\,(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

$$l\,(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\text{etc.};$$

de donde, por sustracción,

$$\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\text{Arg Th}\,x=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{etc.,}\qquad(1)$$

análogo á

$$\text{Arg tang}\,x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\text{etc.}\qquad(2)$$

La fórmula del binomio da, siendo x^2 á lo más igual á 1,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,x^6+\ldots$$

$$+(-1)^n\theta\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\ldots\frac{2n-1}{2n}\,x^{2n};$$

estando θ comprendida entre 0 y 1. Multipliquemos uno y otro miembro por dx é integremos entre los límites 0 y x. La integral $\int_0^x \theta x^{2n}dx$ está comprendida entre 0 é $\int_0^x x^{2n}dx$, es decir que es de la forma $\theta'\,\dfrac{x^{2n}+1}{2n+1}$, estando θ' comprendida también entre 0 y 1. Se tiene pues

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l\,(x+\sqrt{1+x^2}) = \text{Arg Sh}\, x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \theta' \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

es decir, haciendo crecer á n indefinidamente

$$\text{Arg Sh}\, x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \text{etc.} \qquad (3)$$

Esta fórmula es análoga á

$$\text{Arc sen}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \text{etc.} \qquad (4)$$

Para $x=1$, la fórmula (3) da

$$l\,(1+\sqrt{2}) = 0{,}881\ 373\ 587 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7} + \text{etc.}$$

expresión que M. Laisant ha representado por Π.

La combinación de las series (1) (2) (3) (4) conduce á diversos resultados bastante interesantes.

18. *Analogía entre las funciones hiperbólicas y las funciones circulares.* En análisis superior se toman por definición de los senos y cosenos circulares é hiperbólicos las relaciones (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), donde x es *real ó imaginaria*. Las otras funciones se definen por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \text{Th}\, x &= \frac{\text{Sh}\, x}{\text{Ch}\, x} = \frac{1}{\text{Coth}\, x}, \quad \text{Sech}\, x = \frac{1}{\text{Ch}\, x}, \quad \text{Cosech}\, x = \frac{1}{\text{Sh}\, x}; \\ \text{tang}\, x &= \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}; \end{aligned}\right\}(g)$$

Partiendo de estas definiciones pueden demostrarse las fórmulas que dan sen $(t+u)$, Sh $(t+u)$, etc., y, por tanto, todas las propiedades de las funciones circulares y de las funciones hiperbólicas.

Si se cambia x en $x\sqrt{-1}$, la serie (a) se convierte en la serie (c) y recíprocamente; la serie (2) se convierte en la serie (d), multiplicada por $\sqrt{-1}$ y recíprocamente. Exprésase este hecho, en forma abreviada, escribiendo

$$\mathrm{Ch}\,(x\sqrt{-1}) = \cos x, \qquad \mathrm{Sh}\,(x\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x,$$

$$\cos\,(x\sqrt{-1}) = \mathrm{Ch}\,x, \qquad \mathrm{sen}\,(x\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\,x.$$

De aquí se deduce

$$\mathrm{Th}\,(x\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x,$$

$$\mathrm{tang}\,(x\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Th}\,x,$$

$$\mathrm{Coth}\,(x\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}\,\cot x,$$

$$\cot\,(x\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Coth}\,x,$$

$$\mathrm{Sech}\,(x\sqrt{-1}) = \sec x,$$

$$\sec\,(x\sqrt{-1}) = \mathrm{Sech}\,x,$$

$$\mathrm{Cosech}\,(x\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}\,\mathrm{cosec}\,x,$$

$$\mathrm{cosec}\,(x\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}\,\mathrm{Cosech}\,x.$$

Según estas relaciones, se ve que las funciones hiperbólicas definidas como en el § I, y las funciones circulares definidas como en trigonometría, son casos particulares de las funciones generales definidas por las series (a), (b), ó (c), (d) y las relaciones (g), y así se explica la semejanza de sus propiedades.

(Se continuará.)

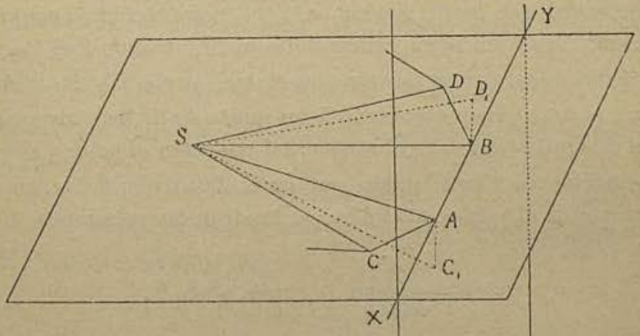
PUNTOS DE INFLEXIÓN

de la curva en que se convierte la sección plana de un cono, al desarrollar éste sobre un plano (1)

Como el método clásico para hallar tales puntos dió motivo á fundada objeción del Sr. Carvallo, juez de los exámenes de admisión en la Escuela politécnica de Paris, (*Nouvelles Annales*, Diciembre de 1894), proponemos, teniéndolas por firmes, estas dos demostraciones del siguiente

Teorema. *Si en un punto* A *de una sección plana de un cono, el plano secante es normal á la superficie, sin ser perpendicular á la generatriz, que pasa por dicho punto, el desarrollo de la sección poseerá un punto de inflexión en el punto correspondiente á* A.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN. Imaginemos una pirámide SCABD... inscripta en el cono y de caras tan angostas como se quiera: por definición, el desarrollo del cono será el límite del desarrollo de esa pirámide, cuando sus caras se reduzcan, tendiendo á convertirse en líneas rectas. Trazado el plano secante CABD, normal á la cara SAB sin ser perpendicular á la arista SA, extendamos la pirámide sobre el plano de dicha cara. Uno de los dos ángulos SAX y SAY, por ejemplo el primero,



será agudo y el otro obtuso. Pero en virtud de un teorema de geometría elemental, el ángulo SAX será menor que el SAC;

(1) Traducido de los *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Febrero de 1896, página 65.

*

luego en el desarrollo el punto C vendrá á un punto C_1 situado respecto de la recta XY á distinto lado que el punto S. En cambio, el ángulo SBY, obtuso como el SAY, del cual difiere en cantidad sumamente pequeña, será mayor que el SBD; luego en el desarrollo el punto D vendrá á un punto D_1 situado respecto de la recta XY al mismo lado que el punto S. Así, pues, prolongada en ambos sentidos la recta AB, que en el límite es un elemento de la curva transformada, cruzará esta curva; y por tanto, el punto A será un punto de inflexión.

Mas la demostración cae por su base cuando el plano secante es perpendicular á la generatriz SA.

Segunda demostración. Si por tres generatrices de un cono cualquiera se hace pasar otro de revolución, cuando las tres generatrices se acerquen indefinidamente, ambos conos serán osculadores en toda la generatriz de contacto; luego osculadoras serán á su vez, en el punto correspondiente de la generatriz de contacto, las secciones de los dos conos por un mismo plano; y otro tanto acontecerá á los desarrollos de estas dos secciones. Por consiguiente, bastará hallar los puntos de inflexión de la curva en que se convierta la sección plana de un cono de revolución, cuando éste quede extendido en un plano.

Imaginemos vertical el eje de tal cono, y sobre el plano horizontal que pase por su vértice, proyectemos cualquier curva trazada en la superficie del cono. Llamando θ el ángulo que las generatrices formen con el eje, ρ y ω las coordenadas polares que pertenezcan á un punto de dicha proyección; en el supuesto de que el vértice del cono sea el polo; y ρ_1 y ω_1 las pertenecientes al punto que en el desarrollo del cono corresponda al punto antedicho, se tendrán las relaciones

$$\omega = \frac{\omega_1}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \rho = \rho_1 \operatorname{sen}\theta .$$

Mas, sobre el referido plano horizontal, toda sección plana del cono se proyecta según una cónica que tiene por foco el vértice y por directriz la intersección del plano secante con ese plano horizontal. Luego llamando φ el ángulo comprendido entre estos dos planos, la excentricidad de la mencionada cónica valdrá

$$e = \tan \varphi \tan \theta,$$

y la ecuación polar de la misma curva será

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

Por consiguiente, la curva en que ésta se convierta al desarrollar el cono, tendrá por ecuación

$$\rho_1 \operatorname{sen} \theta = \frac{p}{1 - e \cos\left(\dfrac{\omega_1}{\operatorname{sen} \theta}\right)}.$$

Adviértase ahora que estando los puntos de inflexión de esta curva dados por la relación

$$\left(\frac{1}{\rho_1}\right)'' + \frac{1}{\rho_1} = 0,$$

en la cual el primer término indica la segunda derivada del término siguiente, tales puntos se hallarán donde se cumpla la condición

$$\cos \omega = \cos\left(\frac{\omega_1}{\operatorname{sen} \theta}\right) = -\frac{\tan^2 \theta}{e} = -\frac{\tan \theta}{\tan \varphi}.$$

Pero la ecuación del plano tangente al cono en el punto ρ, ω, z, es

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - z \tan \theta = 0$$

y para que este plano sea perpendicular al que tiene por ecuación

$$z - x \tan \varphi = 0$$

es decir, al trazado por el vértice del cono paralelamente al plano secante, se debe tener

$$\cos \omega = -\frac{\tan \theta}{\tan \varphi},$$

condición que coincide con la anterior.

Queda, pues, demostrado el teorema.

F. Balitrand,
Teniente de Ingenieros.

Montpellier (Francia.)

DEL PLAGIÓGRAFO Ó PANTÓGRAFO DE INCLINACIÓN [1]

POR

J. J. Sylvester

Estudiando combinaciones de varillas articuladas, se nos ocurrió modificar el antiguo y usual pantógrafo de manera que al reproducir, ampliada ó reducida, una figura, se la hiciera al propio tiempo girar en torno del centro de semejanza. Decida, quien tenga autoridad para ello, hasta dónde es original la idea y si puede ésta ser de utilidad para el dibujante y el grabador, como nuestra invención del isogoniostato, destinado á mantener igual ángulo, tuvo aplicación práctica para mover automáticamente la serie de prismas de un espectroscopio.

El pantógrafo usual lo representa la figura 1 limitada al paralelogramo de varillas articuladas OACB y á la prolonga-

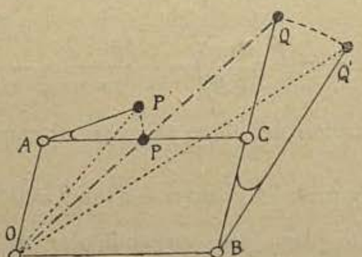


Fig. 1

ción de la varilla BC. Es O el punto fijo, P el trazador, Q el copiador, y al abrir ó cerrar el ángulo AOB, cualquier curva trazada por P es imitada por Q, que describe otra semejante y semejantemente colocada respecto de O.

Consiste la modificación en lo siguiente: llévese el punto P á P', describiendo en torno de A un ángulo PAP'; llévese

(1) Traducido del periódico inglés *Nature*, tomo XII, pág. 168.

á su vez Q á Q′, describiendo en torno de B un ángulo QBQ′ igual al anterior, pero de opuesto sentido, y déjense P′ y Q′ enlazados invariablemente, del modo que se quiera, aquél con la varilla AC y éste con la BC. Es fácil ver que, ya se vaya abriendo ó cerrando el varillaje que forma el paralelogramo, se tendrá constantemente, por las igualdades AP = AP′, BQ = BQ′, OB = AC, y por la semejanza de los triángulos OAP′ y Q′BO, derivada de la de los triángulos OAP y QBO y de la igualdad de ángulos OAP′ = Q′BO,

$$OQ' : OP' = AC : AP;$$

por consiguiente, será también constantemente el ángulo

$$P'OQ' = P'AP = QBQ',$$

pues los triángulos semejantes OAP′ y Q′BO darán la igualdad de ángulos

$$OP'A = Q'OB;$$

pero en el triángulo OP′A es el ángulo

$$P'AP = 180^o - OAP - AOP' - OP'A,$$

y en el paralelogramo OACB es el ángulo

$$P'OQ' = 180^o - OAP - AOP' - Q'OB.$$

Así, pues, mientras el trazador P′ describa una curva, el copiador Q′ describirá otra semejante, ampliada ó reducida, conforme estén los puntos correlativos P y Q situados en el plagiógrafo, y al propio tiempo girada en torno del punto O según el ángulo constante P′OQ′.

Si, como sucede en la figura 2, además de formar el

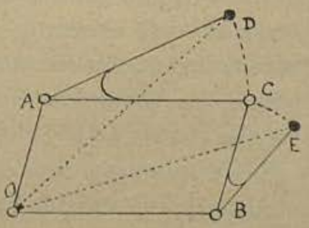


Fig. 2

ángulo CAD = EBC, se toma AD = AC y BE = BC, los rayos vectores OD y OE permanecerán siempre iguales é inclinados según ángulo constante igual á los CAD y CBE. En tal caso la combinación de varillas aprovechará para llevar una figura dibujada en un papel á otra parte del mismo, sin alterar la forma ni la magnitud de esa figura, haciéndola girar tan sólo, en torno de un punto, un ángulo dado.

MOVIMIENTO ARMÓNICO (1)

POR

P. G. Tait

PROFESOR DE FÍSICA EN LA UNIVERSIDAD DE EDIMBURGO

1. Cuando un punto recorre uniformemente una circunferencia, el movimiento presenta aspectos muy distintos según el sitio desde donde el espectador lo contempla. Suponiendo que esté él á muy grande distancia comparada con el radio de la circunferencia, lo que contemple vendrá á ser la proyección ortogonal de la órbita verdadera sobre un plano perpendicular á la visual. Pero una proyección ortogonal de una circunferencia es generalmente una elipse, cuyo centro es la proyección del centro de aquélla, y como áreas iguales se proyectan ortogonalmente según áreas iguales, el movimiento aparente será elíptico y se efectuará describiendo el radio vector, trazado desde el centro, áreas iguales en tiempos iguales. Luego la aceleración estará dirigida hacia el centro. Además, puesto que las aceleraciones se proyectan según las mismas reglas que las velocidades y las rectas recorridas, y puesto que en un movimiento circular uniforme la aceleración es constante y está dirigida hacia el centro, se

(1) Traducido de la *Encyclopædia Britannica*, tomo XV, pág. 685.

infiere que en el movimiento elíptico mencionado, en el cual se describen en iguales tiempos áreas iguales en torno del centro, la aceleración, no sólo estará dirigida hacia el centro, sino que *será proporcional á la longitud del radio vector* (1). Pero esta órbita proyectada puede á su vez proyectarse, cuantas veces se quiera, sobre diferentes planos, con lo cual la curva permanecerá elíptica, el radio vector trazado desde el centro describirá áreas iguales en tiempos iguales, y la aceleración será proporcional á la longitud de este radio vector. Así, pues, por distintas que sean en magnitud y proporción de ejes todas esas órbitas elípticas, tendrán una propiedad común, á saber: que *el tiempo invertido en recorrer cada una de ellas, será el mismo.*

En resumen, cuando la órbita es una elipse descrita en torno de su centro, la aceleración está dirigida hacia este punto y es proporcional al radio vector, y el tiempo en que se describe tal elipse depende solo de la *razón* que tiene la aceleración con la longitud del radio vector; ó, lo que es lo mismo, depende sólo de la magnitud de la aceleración á la unidad de distancia; proposición, cuya recíproca, evidentemente, es cierta también. Esto sentado, conviene notar un caso importantísimo: aquel, en que se contempla de perfil ó de canto el camino circular descrito uniformemente, el cual se proyecta entonces sobre una recta, donde el punto móvil parece *oscilar*. Tal acontece, por ejemplo, muy aproximadamente con los satélites de Júpiter contemplados desde la tierra. Del mismo modo, casi con exactitud, parecen moverse las manchas solares, la mancha encarnada de Júpiter y otras análogas. Pero la grande importancia de esta clase de movimiento estriba en ser éste el tipo más sencillo de oscilación de una partícula material separada de su posición de

(1) Por la ley de Hooke la fuerza elástica desplegada por un desvío es proporcional al mismo y tiende á reponer la partícula en su posición de equilibrio. Citámoslo de paso para encarecer la importancia de este estudio.

equilibrio estable. Pueden citarse como ejemplos las vibraciones del éter cuando la luz homogénea, polarizada en un plano, pasa por éste; las vibraciones del aire cuando suena una nota musical; las oscilaciones del péndulo cuando describen arcos pequeños; las vibraciones más sencillas de un diapasón ó de una cuerda metálica de piano; y las indicaciones de un mareógrafo cuando el mar está tranquilo. De aquí la necesidad de estudiar detenidamente tal movimiento.

2. Defínese por *movimiento armónico sencillo el movimiento componente, paralelo á un diámetro, de un movimiento circular uniforme.*

Si, por ejemplo, es P (figura 1) el punto que recorre uniformemente una circunferencia APA′, el pie M de la perpendicular PM á un diámetro AOA′ tendrá un movimiento armónico sencillo.

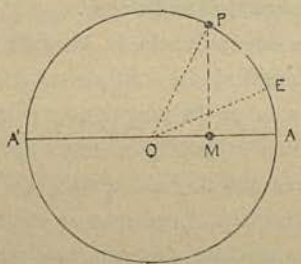


Fig. 1

Es claro que la velocidad v y la aceleración j de M serán las componentes, según AA′, de la velocidad V y de la aceleración J de P; luego

$$v = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PO}} \cdot \mathrm{V}, \qquad j = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{PO}} \cdot \mathrm{J},$$

ó bien, puesto que

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{PO}}, \qquad \text{será} \qquad j = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{PO}^2} \cdot \mathrm{V}^2.$$

Introduciendo en el cálculo la velocidad angular ω de PO, se tendrá

$$\omega = \frac{1}{\text{PO}} \cdot \text{V}, \qquad v = \text{PM} \, . \, \omega, \qquad j = \text{MO} \, . \, \omega^2$$

por donde se ve que la velocidad v de M aumenta desde A, punto en que es nula, hasta O, donde vale V; después disminuye hasta anularse en A′; y en orden inverso adquiere la misma serie de valores numéricos desde que, alcanzado el punto A′, se invierte el sentido del movimiento. En cuanto á la aceleración j de M, está siempre dirigida hacia O; adquiere su máximo valor en A y en A′, y es siempre proporcional á la *distancia desde* O, esto es, á OM.

Llamando T el *período* del movimiento armónico sencillo, es decir, el tiempo invertido por el punto P en recorrer toda la circunferencia, y designando por a el radio de la misma, radio equivalente á la *amplitud* del movimiento armónico sencillo, será

$$\text{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\text{V}} a$$

y por tanto, si por x entendemos el desvío OM del punto M desde O, la relación característica de tal clase de movimiento será en valor absoluto

$$j = \frac{4\pi^2}{\text{T}^2} x \qquad \text{ó} \qquad \text{T} = 2\pi \sqrt{\frac{x}{j}}$$

3. Conviene, antes de seguir más adelante, definir algunos términos. Sea E la posición que el punto, que recorre la circunferencia, ocupa cuando empieza á contarse el tiempo, esto es, cuando $t = 0$, y sea P la posición ocupada al cabo del tiempo t: llámase el ángulo AOE la *época* del movimiento armónico sencillo, y el ángulo AOP la *fase* en el momento dado. Los valores de la época y de la fase en unidades de tiempo se deducen dividiendo por ω sus medidas circulares.

Es fácil hallar el valor de x en función de t y de la época ε, pues

$$x = \mathrm{OM} = \mathrm{OP} \cos \mathrm{POA} = \mathrm{OP} \cos (\mathrm{POE} + \mathrm{EOA});$$

luego

$$x = a \cos (\omega t + \varepsilon).$$

Encuéntrase esta expresión, acaso más á menudo que ninguna otra, en todas las ramas de la Física matemática, pues cada fenómeno periódico puede traducirse matemáticamente por medio de términos, ó series de términos, de esa forma, los cuales tanto intervienen en las fórmulas de la longitud y radio vector de un planeta ó satélite, como en las más complejas ondulaciones que agitan el agua, el aire ó el medio lucífero.

De dicha expresión de x pueden deducirse por cálculo las relaciones obtenidas antes geométricamente, pues si por $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ se indican las derivadas primera y segunda de x con respecto á t, será

$$v = \dot{x} = - a\omega \operatorname{sen} (\omega t + \varepsilon),$$

$$j = \ddot{x} = - a\omega^2 \cos (\omega t + \varepsilon) = - x\omega^2.$$

4. El método gráfico más sencillo para mostrar la ley de un movimiento rectilíneo es combinar éste con otro movimiento uniforme en dirección perpendicular á la recta donde el primero se realiza; y esto es lo que suele hacerse en la mayoría de los instrumentos de registro automático, en los cuales una cinta de papel, impulsada por un mecanismo de relojería, se desliza uniformemente por debajo del punto móvil en dirección perpendicular á la recta en que éste se mueve, con lo cual en dicha cinta puede dejarse una huella por algún medio mecánico, ó por algún lápiz, chispa eléctrica ó, mejor todavía, impresión fotográfica. Cuando tal procedimiento se aplica al movimiento armónico sencillo, la curva

trazada tiene la forma que se ve en la figura 2. Llámase esta línea la *curva de senos*

Fig. 2

ó *curva armónica*. Puede resultar más estrecha ó más amplia en sentido vertical ú horizontal; pero el tipo genérico es siempre el mismo. Representa tal curva las figuras más sencillas formadas por una cuerda, al vibrar, y representa también la figura de la sección hecha, en un momento dado, en la superficie del agua rizada por ondulación ó escarceo, figura que, sin alteración, va avanzando, según el tiempo transcurre, en el sentido en que las ondas caminan.

Exprésase ésto analíticamente con la fórmula

$$y = a \cos (nt - mx),$$

en la cual x é y indican la abscisa horizontal y la ordenada vertical de un punto de la superficie del agua, contándose y desde el nivel de la misma cuando está sosegada. Suponiendo constante x, se tendrá el simple y armónico subir y bajar que, transcurriendo el tiempo, se notará en el sitio señalado por el valor de x; y suponiendo t constante, se tendrá la antedicha figura del grabado ó sea la figura que toda la superficie del agua presentará, vista de una ojeada en el momento señalado por el valor de t. Es claro que el período invertido en el avance de la onda es $\frac{n}{m}$, pues aumentando t en cualquier cantidad τ, y á su vez x en la cantidad correlativa $\frac{n}{m}\,\tau$, no padecerá alteración el valor de y.

(Se continuará.)

SOLUCIONES DE CUESTIONES PROPUESTAS

CUESTIÓN 11

Compónese la masa de pan de $\frac{13}{35}$ de agua por $\frac{22}{35}$ de harina. El peso del pan cocido es los $\frac{6}{7}$ de su peso en masa. ¿Qué cantidad habrá que poner de harina y de agua para obtener 352 kilogramos de pan?

PRIMERA SOLUCIÓN

Siendo el peso del pan los $\frac{6}{7}$ del peso de la masa, 35^{kg} de ésta darán 30^{kg} de pan, que estará compuesto de 22^{kg} de harina y 8^{kg} de agua. Así, pues, la harina necesaria para obtener 352^{kg} de pan, se hallará por la proporción

$$\frac{30}{22}=\frac{352}{x}, \quad \text{que da} \quad x=258^{kg}{\cdot}133;$$

y la cantidad correspondiente de agua se hallará por la proporción

$$\frac{22}{13}=\frac{258{\cdot}133}{z}, \quad \text{que da} \quad z=152^{kg}{\cdot}533.$$

SEGUNDA SOLUCIÓN

Como el peso del pan es los $\frac{6}{7}$ del peso de la masa, este peso será los $\frac{7}{6}$ del primero; y por tanto, los 352^{kg} de pan procederán de $410^{kg}{\cdot}666$ de masa. Así, para hallar la harina necesaria, pondremos

$$\frac{35}{22}=\frac{410{\cdot}666}{x}, \quad \text{de donde} \quad x=258^{kg}{\cdot}133,$$

y para hallar el agua correspondiente, escribiremos

$$\frac{35}{13}=\frac{410{\cdot}666}{z}, \quad \text{de donde} \quad z=152^{kg}{\cdot}533.$$

JOSÉ LLUCH MELÉNDEZ,
Alumno de 1.er año de la Facultad de Ciencias de Valencia.

La solución dada por D. Lorenzo Miralles, residente en Madrid, es análoga á la segunda de las dos anteriores.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.