ARCHIVO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Núm. 5 MAYO 1896

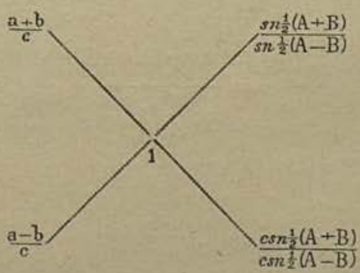
SUMARIO.—Diagramas mnemónicos de Trigonometría, por D. Luis G. Gascó. (*Continuación.*)—Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas, por P. Mansion. (*Continuación.*)—Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual á la suma ó diferencia de dos dados, por D. Ventura Reyes Prósper.—Análisis armónico, por J. Clerk Maxwell.—Soluciones de cuestiones propuestas.

DIAGRAMAS MNEMÓNICOS DE TRIGONOMETRÍA

(*Continuación.* Véase pág. 64)

Para resolver los triángulos rectilíneos oblicuángulos, en los casos en que sean conocidos dos lados y el ángulo comprendido, ó un lado y los dos ángulos adyacentes, proponemos el

Diagrama 11



constituido con la suma y la diferencia de dos lados, divididos por el tercero, y con el seno y el coseno de la semisuma

Biblioteca Nacional de España

de los ángulos opuestos, respectivamente divididos por el seno y el coseno de la diferencia de los mismos.

De él se derivan las relaciones ó analogías de Mollweide mediante la siguiente regla, casi idéntica á la correspondiente al diagrama 2.

Una expresión extrema cualquiera del diagrama es igual al cociente de las dos que le son consecutivas en su recta, ó bien *un extremo cualquiera del diagrama es igual al recíproco del otro extremo de la misma recta.*

Aplicando esta regla obtendremos

$$193)\qquad \frac{a+b}{c}=\frac{csn\,\frac{1}{2}(A-B)}{csn\,\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$194)\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{sn\,\frac{1}{2}(A-B)}{sn\,\frac{1}{2}(A+B)}$$

resultados que admiten entre otras las siguientes formas

$$195)\qquad \frac{a+b}{c}=\frac{sc\,\frac{1}{2}(A+B)}{sc\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$196)\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{csc\,\frac{1}{2}(A+B)}{csc\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$197)\qquad \frac{a+b}{c}=sc\,\frac{A+B}{2}\,csn\,\frac{A-B}{2}$$

$$198)\qquad \frac{a-b}{c}=csc\,\frac{A+B}{2}\,sn\,\frac{A-B}{2}$$

Biblioteca Nacional de España

199) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\ \frac{1}{2}(A+B)}{tg\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

200) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{ctg\ \frac{1}{2}(A-B)}{ctg\ \frac{1}{2}(A+B)}$$

201) $$\frac{a+b}{a-b}=tg\ \frac{A+B}{2}\ ctg\ \frac{A-B}{2}$$

202) $$\frac{a+b}{c}=\frac{csn\ \frac{1}{2}(A-B)}{sn\ \frac{1}{2}C}$$

203) $$\frac{a-b}{c}=\frac{sn\ \frac{1}{2}(A-B)}{csn\ \frac{1}{2}C}$$

204) $$\frac{a+b}{c}=\frac{csc\ \frac{1}{2}C}{sc\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

205) $$\frac{a-b}{c}=\frac{sc\ \frac{1}{2}C}{csc\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

206) $$\frac{a+b}{c}=csn\ \frac{A-B}{2}\ csc\ \frac{C}{2}$$

207) $$\frac{a-b}{c}=sn\ \frac{A-B}{2}\ sc\ \frac{C}{2}$$

Biblioteca Nacional de España

$$208) \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{ctg\ \frac{1}{2}\,C}{tg\ \frac{1}{2}\,(A-B)}$$

$$209) \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{ctg\ \frac{1}{2}\,(A-B)}{tg\ \frac{1}{2}\,C}$$

$$210) \qquad \frac{a+b}{a-c} = ctg\,\frac{A-B}{2}\,ctg\,\frac{C}{2}$$

Para el cálculo simultáneo de dos ángulos B, C, de un triángulo, en función de los lados opuestos a, b, y del ángulo C comprendido por ellos, se emplean usualmente las siguientes fórmulas

$$211) \qquad \begin{cases} \dfrac{A+B}{2} = 90^{\circ} - \dfrac{C}{2} \\ tg\,\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\,ctg\,\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

$$212) \qquad \begin{cases} \dfrac{A+B}{2} = 90^{\circ} - \dfrac{C}{2} \\ ctg\,\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a+b}{a-b}\,tg\,\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

y el tercer lado c se obtiene por una de las fórmulas

$$213) \qquad c = (a+b)\,\frac{sn\,\dfrac{C}{2}}{csn\,\dfrac{A-B}{2}}$$

$$214) \qquad c = (a+b)\,sc\,\frac{A-B}{2}\,sn\,\frac{C}{2}$$

Biblioteca Nacional de España

215) $$c = (a - b) \frac{csn \frac{C}{2}}{sn \frac{A - B}{2}}$$

216) $$c = (a - b)\, csc \frac{A - B}{2}\, csn \frac{C}{2}$$

Conocidos en un triángulo un lado a y los ángulos B, C, adyacentes al mismo, se calculan simultáneamente los lados b, c, opuestos á los ángulos dados, por las fórmulas

217) $$b + c = a \frac{sc \frac{B + C}{2}}{sc \frac{B - C}{2}}$$

218) $$b + c = a\, sc \frac{B + C}{2}\, csn \frac{B - C}{2}$$

219) $$b - c = a \frac{sn \frac{B - C}{2}}{sn \frac{B + C}{2}}$$

220) $$b - c = a\, sn \frac{B - C}{2}\, csc \frac{B + C}{2}$$

que se derivan de las (195), (197), (194) y (198), por evolución circular entre los elementos a, b, c y A, B, C.

El ángulo A se halla por la relación

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

(*Se continuará.*)

Biblioteca Nacional de España

TEORÍA SUCINTA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

(*Continuación.* Véase pág. 71)

III. **Derivadas, integrales, series**

16. *Derivadas é integrales.* Se encuentra inmediatamente, escribiendo D en vez de D_x

$$D\,\mathrm{Sh}\,x = \mathrm{Ch}\,x, \qquad \int \mathrm{Ch}\,x\,dx = \mathrm{Sh}\,x,$$

$$D\,\mathrm{Ch}\,x = \mathrm{Sh}\,x, \qquad \int \mathrm{Sh}\,x\,dx = \mathrm{Ch}\,x,$$

$$D\,\mathrm{Th}\,x = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{Ch}^2 x} = \mathrm{Th}\,x,$$

$$D\,\mathrm{Coth}\,x = -\frac{1}{\mathrm{Sh}^2 x} \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{Sh}^2 x} = -\mathrm{Coth}\,x,$$

$$D\,l\,\mathrm{Sh}\,x = \mathrm{Coth}\,x, \qquad \int \mathrm{Coth}\,x\,dx = l\,\mathrm{Sh}\,x,$$

$$D\,l\,\mathrm{Ch}\,x = \mathrm{Th}\,x; \qquad \int \mathrm{Th}\,x\,dx = l\,\mathrm{Ch}\,x.$$

Para las funciones hiperbólicas inversas resulta

$$D\,\mathrm{Arg\,Ch}\,x = D \pm l\,(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (x > 1)$$

$$D\,\mathrm{Arg\,Sh}\,x = D\,l\,(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$D\,\mathrm{Arg\,Th}\,x = D\,\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad (x^2 < 1)$$

$$D\,\mathrm{Arg\,Coth}\,x = D\,\frac{1}{2}\,l\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad (x^2 > 1)$$

$$D\,\mathrm{Arg\,Sech}\,x = D \pm l\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = \frac{\mp 1}{x\sqrt{1 - x^2}} \quad (x < 1)$$

Biblioteca Nacional de España

$$\mathrm{D}\ \mathrm{Arg\ Cosech}\, x = \mathrm{D}\, l \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) = \frac{-1}{x\sqrt{1 + x^2}}.$$

Las fórmulas correspondientes en cálculo integral son

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = l\,(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm\,\mathrm{Arg\ Ch}\, x, \qquad (x > 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = l\,(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \mathrm{Arg\ Sh}\, x,$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = l \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = \mathrm{Arg\ Th}\, x, \qquad (x^2 < 1)$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = l \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} = \mathrm{Arg\ Coth}\, x, \qquad (x^2 > 1)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = -\,l \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) = \mp\,\mathrm{Arg\ Sech}\, x, \ (x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} = -\,l \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) = -\,\mathrm{Arg\ Cosech}\, x,$$

análogas á fórmulas conocidas relativas á las funciones circulares inversas.

Las integrales que contienen funciones hiperbólicas se obtienen, en general, por procedimientos semejantes á los que dan las integrales que contienen funciones circulares. Ejemplos:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}\, x} = \int \frac{dx}{2\, \mathrm{Sh}\, \frac{1}{2}x\ \mathrm{Ch}\, \frac{1}{2}x} = \int \frac{\dfrac{d\,\frac{1}{2}x}{\mathrm{Ch}^2\,\frac{1}{2}x}}{\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}x} = l\ \mathrm{Th}\,\frac{1}{2}x$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Ch}\, x} = \int \frac{dx}{\mathrm{Ch}^2\frac{1}{2}x + \mathrm{Sh}^2\frac{1}{2}x} = 2\int \frac{d\ \mathrm{Th}\,\frac{1}{2}x}{1 + \mathrm{Th}^2\frac{1}{2}x} =$$

$$= 2\ \mathrm{arc\ tang\ Th}\,\frac{1}{2}x$$

Biblioteca Nacional de España

Observación. Si se tiene $\operatorname{Ch} t \cos \theta = 1$, se encuentra

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos \theta, \quad \frac{dt}{d\theta} = \operatorname{Ch} t.$$

17. *Series.* Los principales desarrollos en serie de las funciones hiperbólicas se obtienen tan fácilmente como los de las funciones circulares.

Se sabe que, para todo valor real de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

De donde, por adición y sustracción,

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}, \qquad (a)$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}, \qquad (b)$$

fórmulas análogas á las

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}, \qquad (c)$$

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} \qquad (d)$$

De aqui se deduce fácilmente

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Ch} x + \cos x) = 1 + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Ch} x - \cos x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Sh} x + \sin x) = \frac{x}{1} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{Sh} x + \sin x) = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$

(Se continuará.)

Biblioteca Nacional de España

NUEVA DEMOSTRACIÓN

de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual á la suma ó diferencia de dos dados

Me propongo, en esta corta nota, deducir por medio de consideraciones estereométricas las fórmulas que expresan el valor del seno y coseno de $\alpha \pm \beta$. No conozco ningún autor que dé una demostración semejante á la que presento, y me ha complacido siempre en extremo buscar el enlace entre la Geometría plana y la del espacio, lo que en algunos casos proporciona demostraciones más sencillas, y en otros, por lo menos, un concepto más claro del asunto, ofreciendo generalizaciones curiosas. Tales razones me inducen á publicar estas líneas.

Es conocido que la raiz cuadrada de la determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

cuyo valor es susceptible de tomar todos los comprendidos entre -1 y $+1$, éstos incluidos, ha sido denominada por el geómetra alemán Christián von Staudt, seno de un triedro cuyas caras son α, β, γ. Es evidente que dos triedros simétricos tendrán igual seno.

Si se quiere dar á esta definición una interpretación geo-

*

Biblioteca Nacional de España

métrica es fácil hacerlo y se ha llegado así á establecer la sabida fórmula

$$\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}} = V$$

en la que V expresa el volumen del tetraedro que resulta de tomar á partir del vértice del triedro y sobre cada una de sus aristas, una longitud igual á la unidad.

Es probable que la consideración de la determinante de segundo grado

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha$$

condujese al ilustre profesor de Erlangen á la idea del seno del triedro expresada por la determinante de tercer grado.

Comenzaré por hallar el valor de $\cos(\alpha \pm \beta)$ para luego deducir el de $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$.

Supongamos ahora que $\gamma = \alpha \pm \beta$.

En este caso las tres aristas que formaban el triedro vienen á colocarse en un plano y el seno del triedro debe valer cero, pues el volumen que entonces se obtiene es nulo.

Tendremos pues

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \beta$$

Desarrollando la determinante por la regla de Sarrus s saca:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0$$

ú ordenando con respecto á $\cos\gamma$,

$$\cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0,$$

Biblioteca Nacional de España

Resolviendo esta ecuación de segundo grado con respecto á $\cos\gamma$ se halla:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta\,(1 - \cos^2\alpha)}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha\,(1 - \cos^2\beta)}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Esta es la fórmula que deseábamos obtener. De ella se deduce muy fácilmente ésta:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

En efecto, si hacemos $\gamma' = 90^\circ - \alpha - \beta$ tendremos, por ejemplo,

$$\cos\gamma' = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)] =$$

$$= \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \cos(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)\operatorname{sen}\beta$$

ó sea

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$

La discusión y generalización de estas fórmulas para cualquier valor de α y de β se hace con tan extremada simplicidad que no creo oportuno el insistir sobre ésto.

Dr. Ventura Reyes Prósper,

Catedrático.

Biblioteca Nacional de España

ANÁLISIS ARMÓNICO [1]

POR

J. Clerk Maxwell

En su tratado de Física ó Filosofía natural, Sir William Thomson y el Profesor Tait designan con el nombre de *Análisis armónico* un método general aplicable á problemas físicos y sugerido, según parece, por el estudio de las vibraciones de las cuerdas y por la descomposición de tales vibraciones en sus tonos fundamentales y armónicos.

Al oscilar entre sus dos extremos fijos una cuerda de uniforme tensión, efectúa un movimiento periódico, lo cual quiere decir que al cabo de cierto intervalo de tiempo, que se llama el período fundamental del movimiento, la forma de la cuerda y la velocidad de cada parte de ella vuelven á ser las mismas que antes, con tal que durante ese período no se disipe en cantidad perceptible la energía del movimiento.

Ofrécense para semejante problema dos métodos diferentes: uno, el llamado método ondulatorio, y otro, el método armónico. Fúndase el primero en que cuando, tendida una cuerda de longitud indefinida, se produce en ella una onda de cualquier forma, esta onda se propaga en ambos sentidos con cierta velocidad V, llamada *velocidad de propagación*. Pero si, al avanzar en sentido positivo esa onda de forma cualquiera, encuentra otra que camine en sentido opuesto y posea tal forma que las rectas, por las cuales se unan los puntos correspondientes de ambas ondas, queden divididas por mitad en cierto punto de la recta señalada por la cuerda en sosiego, la partícula situada en tal punto permanecerá inmóvil cuando por ella, en opuesto sentido, crucen las dos ondas.

(1) Traducido de la *Encyclopædia Britannica*, tomo XI, pág. 481.

Biblioteca Nacional de España

Suponiendo que las ondas propagadas en sentido positivo tengan forma periódica, esto es, que después de haber recorrido la onda la distancia l, la posición de cada partícula de la cuerda sea la misma que era en un principio, l será entonces lo que se llama *longitud de onda*, y el tiempo invertido por la onda en recorrer esta longitud será lo que se llama *duración del período*, la cual, designada por T, estará ligada con la longitud de onda y con su velocidad por la relación

$$l = \mathrm{VT}.$$

Mas si una serie de ondas, semejante á la antedicha, pero en posición inversa, camina en sentido opuesto, habrá una serie de puntos, separados cada uno del siguiente por una distancia igual á $\frac{1}{2}l$, en los cuales las partículas correspondientes de la cuerda permanecerán inmóviles: luego el movimiento oscilatorio de la cuerda no variará en nada, si atándola por dos cualesquiera de dichos puntos á dos apoyos fijos, se suprimen las dos porciones de cuerda que queden por fuera, pues no influirán en el movimiento de la otra parte, entre ellos comprendida. Hallámonos con ésto ante una cuerda uniforme tendida entre dos apoyos fijos, y de lo expuesto se infiere que será dado representar en un todo el movimiento de esta cuerda como resultante de dos series de ondas periódicas que en sentido opuesto caminen, teniendo cada serie longitud de onda igual al duplo de la distancia entre los dos puntos fijos, ó igual á un submúltiplo de esta distancia, mas quedando enteramente arbitraria la forma de tales ondas, sujetas á la anterior condición.

Si, para dejar determinado el problema, se supone que el desvío y velocidad iniciales de cada partícula de la cuerda estén dados en función de la distancia á que la partícula se halle de un extremo de la cuerda, será fácil calcular, partiendo de tales datos, la forma común á todas las ondas que se propaguen; y la figura de la cuerda en cualquier momento posterior se deducirá, calculando las posiciones de las dos series de ondas en ese momento, y componiendo sus desvíos.

Biblioteca Nacional de España

Así, pues, el método ondulatorio imagina el verdadero movimiento de la cuerda como resultante de dos movimientos ondulatorios, ninguno de los cuales por sí sólo, prescindiendo del otro, subsistiría con la condición de que los extremos de la cuerda estuvieran fijos. Es periódico cada movimiento ondulatorio y posee una longitud de onda igual á dos veces la distancia entre los puntos fijos; pero una serie de ondas es el reverso de la otra en cuanto al desvío, á la velocidad y al sentido de la propagación. Cumplidas estas condiciones, la forma de la onda es enteramente arbitraria; y de tipo asimismo arbitrario es el movimiento de una partícula de la cuerda, del cual sólo se sabe que es producido por dos ondas que pasan por ella en opuesto sentido.

En cambio, el método armónico considera el movimiento de la cuerda como compuesto de series de movimientos vibratorios, en número infinito, si se quiere, pero cada uno de tipo enteramente definido; y resuelve el problema como caso particular del planteado por el movimiento de la cuerda entre sus extremos fijos.

Llaman Thomson y Tait *movimiento armónico sencillo* el efectuado, sobre un diámetro fijo AA′ de una circunferencia, por el pie P de la perpendicular trazada á dicho diámetro desde un punto Q que recorre uniformemente esa circunferencia. En tal movimiento armónico la *amplitud* es el máximo desvío alcanzado á uno ú otro lado del punto medio de la línea recorrida; el *período* es el tiempo transcurrido desde que el punto móvil pasa por un punto de la línea recorrida hasta que vuelve de nuevo, en el mismo sentido, á pasar por el mismo punto; y la *fase* en un momento dado es la fracción de período que ha transcurrido desde que el punto móvil pasó por el punto medio en sentido positivo.

En una cuerda tendida el movimiento de una partícula no es armónico sencillo sino en ciertos casos particulares. Cuando esto ocurre, la forma de la cuerda en cualquier instante es la de una curva de senos, la cual pasa por los dos puntos fijos, tiene por eje la recta por ellos trazada, y posee una longitud de onda igual al duplo de la longitud de la cuerda ó igual á un submúltiplo de esta longitud. La ampli-

Biblioteca Nacional de España

tud de la curva de senos es una función armónica sencilla del tiempo; y el período es el llamado fundamental ó un submúltiplo de este mismo. Cada movimiento vibratorio de esta clase es posible dinámicamente, y cualquier número de ellos pueden coexistir, cada uno con independencia de los otros.

Ajustando la amplitud y fase iniciales de cada movimiento vibratorio de modo adecuado para que el movimiento resultante constituya el estado inicial de la cuerda, tendremos una nueva representación del movimiento completo de la cuerda, el cual aparecerá, por lo tanto, como resultante de una serie de vibraciones armónicas sencillas cuyos períodos serán los fundamentales ó submúltiplos de los mismos. Problema de análisis armónico será el hallar las amplitudes y fases de varias vibraciones armónicas sencillas que cumplan con las condiciones iniciales.

Tenemos, pues, dos métodos para resolver la ecuación diferencial parcial del movimiento de una cuerda. El primero, es decir, el que llamábamos método ondulatorio, da la solución en una fórmula donde queda una función arbitraria, cuya índole ha de fijarse con sujeción á condiciones iniciales. El segundo, esto es, el método armónico, da una serie de términos que envuelven senos y cosenos, cuyos coeficientes han de determinarse. De un modo más general puede definirse el método armónico como aquel por cuyo medio el problema planteado se resuelve por una suma ó una resultante de términos, cada uno de los cuales es solución de un caso particular del problema. Defínese la índole de estos casos particulares por la condición de que cada dos de ellos sean conjugados uno de otro.

La prueba matemática de esta conjunción es que la energía del sistema, nacida de dos movimientos armónicos coexistentes, sea igual á la suma de las energías que provengan de esos dos movimientos por separado. En otros términos, ninguna parte de la energía depende del producto de las amptitudes de los dos distintos movimientos armónicos. Cuando dos movimientos componentes de un mismo sistema son conjugados, cada uno se efectúa con independencia del otro.

Biblioteca Nacional de España

El caso más sencillo de análisis armónico, es decir, aquel de que es un ejemplo el estudio de una cuerda vibrante, se resuelve por completo con el llamado teorema de Fourier, el cual establece que toda función, de un período variable sencillo p, que en ninguna fase se vuelve infinita, puede desarrollarse según una fórmula compuesta de un término constante y de dos series de términos, de las cuales una contiene los cosenos y otra los senos de los múltiplos de la fase. Así, suponiendo $\varphi(\xi)$ función periódica de la variable ξ, con un período p, se tendrá

$$\varphi(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos\frac{2i\pi\xi}{p} + \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i \operatorname{sen}\frac{2i\pi\xi}{p} \quad (1)$$

El problema que más á menudo acontece y que, á la vez, con mayor facilidad se resuelve, consiste en hallar los valores de los coeficientes A_0, A_i, B_i, los cuales están dados por las fórmulas

$$A_0 = \frac{1}{p}\int_0^p \varphi(\xi)\, d\xi,$$

$$A_i = \frac{2}{p}\int_0^p \varphi(\xi) \cos\frac{2i\pi\xi}{p}\, d\xi,$$

$$B_i = \frac{2}{p}\int_0^p \varphi(\xi) \operatorname{sen}\frac{2i\pi\xi}{p}\, d\xi,$$

como puede verse desde luego, multiplicando los dos miembros de la igualdad (1) por uno ú otro de los tres factores

$$d\xi, \qquad \cos\frac{2i\pi\xi}{p}\, d\xi, \qquad \operatorname{sen}\frac{2i\pi\xi}{p}\, d\xi,$$

é integrando después entre 0 y p.

Es evidente que la serie antedicha sólo posee un valor para cada valor dado de ξ, y por tanto no puede representar una función de ξ que alcance más de un valor ó se vuelva

Biblioteca Nacional de España

imaginaria con cierto valor de ξ. Esa serie es convergente y para todo valor de ξ se aproxima al verdadero de $\varphi(\xi)$ de manera que si ξ varía de un modo continuo ó por grados infinitamente pequeños, la función variará del mismo modo.

Aprovechando Sir William Thomson la máquina de integrar inventada por su hermano el profesor James Thomson, construyó otra por cuyo medio, ya registrada la curva que deja en pos una cantidad variable periódicamente, como la altura de las mareas, la temperatura ó presión de la atmósfera, ó la intensidad de las componentes del magnetismo terrestre, pueden obtenerse á un tiempo ocho integrales de las requeridas en la serie de Fourier. Es verdad que en vez de trazar la acción de la marea una curva, y la máquina otra curva después, pudiera el eje cronométrico de la misma máquina ser impelido por un reloj y la propia marea señalar la segunda variable de la máquina; pero, aparte de que así se invertiría más tiempo, sería menester contar con una máquina costosa en cada estación donde se midieran las mareas.

No carecerá de interés advertir de paso la analogía que los métodos matemáticos y mecánicos del análisis armónico tienen con los procedimientos dinámicos que se siguen cuando un rayo de luz compuesta se resuelve en vibraciones simples por medio de un prisma, ó cuando un sonido armónico particular se destaca de un tono complejo con un resonador, ó cuando la onda sonora, sumamente complicada, que lanza una orquesta ó bien la discorde gritería que produce una multitud de gente son traducidas en notas musicales ó en palabras distintas por quien escucha atentamente, provisto del arpa de tres mil cuerdas, cuya resonancia en el pabellón de su oído le hace distinguir las múltiples componentes de las ondas del océano aéreo.

Biblioteca Nacional de España

SOLUCIONES DE CUESTIONES PROPUESTAS

CUESTIÓN 9

Siendo p un número primo con 10, demostrar que se puede siempre encontrar un múltiplo de p terminado por cifras arbitrarias.

SOLUCIÓN

El número p por ser primo con 10 ha de terminar en 1, 3, 7 ó 9.

Si examinamos los múltiplos de los números 1, 3, 7 y 9, notaremos que en cada uno de los cuatro grupos cada múltiplo termina por una cifra diferente, y como hay diez múltiplos están empleadas todas las cifras de la numeración; luego cuando el número de cifras arbitrarias de que se trata es uno podemos decir que está demostrado el teorema.

Supongamos ahora para la demostración general, que las cifras terminales escogidas son a, b, c y d; el número completo será $Nabcd$, llamando N al grupo de cifras indeterminadas que preceden al grupo terminal $abcd$.

Cualquiera que sea la cifra d, siempre se puede hallar un número de una cifra que multiplicado por p dé un producto que termine en d; si este producto lo restamos del número $Nabcd$ quedará un resto de la forma $N_1a_1b_1c_1o$.

Cualquiera que sea la cifra c_1 siempre es posible hallar un número de una sola cifra que multiplicado por p dé un producto que termine en c_1; si este producto lo restamos del número $N_1a_1b_1c_1$ llegaremos á un resto de la forma $N_2a_2b_2o$.

De este modo llegaremos á un resto N_3a_3, en el cual N_3 ha de tener por lo menos $m - 1$ cifras, siendo m el número de cifras que tiene p, y, como hemos demostrado, puede hallarse un número de una sola cifra que multiplicado por p dé un producto que termine en a_3. Formando un número cuyas cifras sean las que hemos utilizado como multiplicadores de-

Biblioteca Nacional de España

p queda demostrada la existencia de un número que multiplicado por p da un producto que termina en *abcd*.

JOSÉ LLUCH MELÉNDEZ,
Alumno de 1.er año de la Facultad de Ciencias de Valencia.

OTRA SOLUCIÓN

Primeramente, los productos de p por los nueve primeros números tendrán distinta cifra de unidades, pues si fueran

$$\alpha p = 10\, q + r,$$
$$\alpha' p = 10\, q' + r,$$

sería
$$(\alpha - \alpha')p = 10\,(q - q');$$

y siendo p primo con 10, debería ser $\alpha - \alpha'$ divisible por este número, que es mayor que dicha diferencia.

Infiérese de aquí que existe un número dígito, por el cual multiplicado p, da un producto terminado en una cifra de unidades prefijada y distinta de cero.

Esto sentado, es fácil ver, por la siguiente multiplicación de números cuyas últimas cifras están indicadas por letras

$$\begin{array}{rr}
p = & \ldots \nu\mu\lambda \\
n = & \ldots \gamma\beta\alpha \\
\hline
 & \ldots a''a'a \\
 & \ldots\, b''b' \\
 & \ldots\, c'' \\
 & \ldots \\
\hline
m = & \ldots\ldots cba
\end{array}$$

que, siendo p primo con 10, el producto de p por n será un número m terminado en cifras dadas $..\,cba$, si las últimas cifras del factor n se eligen de manera que el producto de p por α termine en a, el de p por β acabe en $b' = b - a'$, el de p por γ acabe en $c'' = c - b'' - a''$, y así prosiguiendo.

LORENZO MIRALLES.

Madrid.

Biblioteca Nacional de España

CUESTIÓN 10

Resolver el problema anterior (cuestión 9) en un sistema de numeración de base B, siendo p primo con B.

SOLUCIÓN

Los números 1, B, B^2, B^3, . . . , primos todos con p, divididos por este número, dan restos, inferiores á p y distintos de 0, que deben desde el primero repetirse, pues si B^r y B^n dan restos iguales, se tendrá

$$B^r \equiv B^n \text{ (módulo } p) \qquad \text{ó} \qquad B^n (B^{r-n} - 1) = \dot{p};$$

luego $$B^{r-n} \equiv 1 \text{ (módulo } p).$$

Mas si B^α es uno de los dividendos que dan por resto 1, se expresará esto, escribiendo la igualdad

$$B^\alpha - 1 = \dot{p},$$

de la cual se infiere que multiplicando el primer miembro por los números, todos ellos de una cifra, menos el primero que es la base, puestos en la primera de las dos columnas siguientes, se tendrán los múltiplos de p contenidos en la segunda:

$$\begin{array}{ll}
B & B^{\alpha+1} \ldots\ldots - B + 0 \\
B - 1 & B^{\alpha+1} - B^\alpha - B + 1 \\
B - 2 & B^{\alpha+1} - B^\alpha - 2B + 2 \\
\vdots & \vdots \\
B - (B - 1) & B^{\alpha+1} - B^\alpha - (B - 1)B + (B - 1);
\end{array}$$

pero como el último término de cada uno de estos múltiplos es una sola cifra, que varía de 0 á B — 1, y los otros términos acaban en cero, queda demostrada la proposición para la última cifra. Fácil es generalizarla á las demás.

JORGE LUZÓN.

Toledo.

Valencia: Imprenta de Nicasio Rius.—1896.

Biblioteca Nacional de España