

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

Don Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

en la

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TOMO I -- AÑO 1891



ZARAGOZA

Imprenta de C. ARINO, Coso, núm. 100, bajos

1891

El Progreso Matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR

Don Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

en la

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TOMO I -- AÑO 1891



ZARAGOZA

Imprenta de C. ARINO, Cogo, núm. 100, bajos

1891

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

Director: D. Zoel G. de Galdeano

Año I.

Zaragoza 20 de Enero de 1891.

Núm. 1.º

El objeto y los propósitos de la actual publicación

Es un hecho sorprendente que en España, donde tantos periódicos se publican, destinados á los fines más diversos, no exista uno cuyo objeto exclusivo sea la propaganda y desenvolvimiento de las ciencias matemáticas. Este hecho no debe atribuirse en absoluto á desconocimiento en dicho ramo del saber, ni á que tales ciencias repugnen á la mayoría de las inteligencias, cuyos esfuerzos se emplean en otros géneros de investigaciones, de igual manera que se aplicarían á las ciencias exactas, si estas ofrecieran en nuestra patria mayor estímulo y más ancho campo donde espaciarse; pues siendo la ciencia una, existiendo entre sus diversas ramas tan solo variedad en el objeto, conservando la inteligencia algo de permanente en la forma de los procedimientos que la conducen á la verdad, no existe razón alguna para que tal ó cual de estas especiales manifestaciones de su actividad permanezcan cristalizadas, cuando al mismo tiempo otras siguen su curso natural; y semejante desequilibrio solo puede existir de una manera accidental pronta á desaparecer con ocasión á veces del más leve impulso que conduzca á armonizar las varias categorías de verdades dentro del conjunto general que constituye la ciencia humana.

Existen aficionados á la ciencia de la cantidad como existen entusiastas de las artes y las letras, pues todas tienen sus ideales, seguidos preferentemente por quien posee tal ó cual vocación en el culto de la verdad; y hoy en España se sigue la corriente de la Matemática moderna, que iniciada por los Lagrange, Monge, Cauchy y otros muchos eximios talentos de este siglo, en la actualidad se mueve bajo la influencia predominante de los Cayley, Sylvester y Hamilton, que han

organizado y desenvuelto las teorías de las formas y de los cuaternios en Inglaterra; de los Poncelet y Chasles, que en Francia han edificado la Geometría moderna sobre la base de la proyección central y la relación anarmónica; de los alemanes Moëbius, Plücker y Clebsch, y del matemático francés Bobillier, que han dado impulso a la Geometría analítica, llevandola más allá del reducido campo señalado por las coordenadas cartesianas con otros nuevos modos de representación; de los Staudt, que han dado un carácter eminente gráfico a la Geometría, de los Hermite, Weierstrass, Bois-Reymond y Cantor, que en el Análisis han hecho amplificarse las creaciones de los Legendre, Abel y Jacobi en la teoría de las funciones elípticas; de los Cremona, Brioschi, Battaglini y Beltrami, que mantienen el progreso de la Geometría y el Análisis en Italia.

Todo este movimiento general se sigue en España, si bien reducido á aquello de más esencial que contiene cuanto ofrece inmediata aplicación, ó que es un elemento indispensable para llegar al nivel de lo que hoy constituye la cultura matemática; pero esto que se circunscribe á un reducido número de personas dedicadas por su profesión á tal género de lucubraciones, no trasciende á otro público más numeroso que podría aprovechar las ventajas de estos conocimientos, y aun llegar á contribuir al adelantamiento general, si se le facilitara el acceso á ideas que parecen más difíciles de adquirir al parecer de lo que son en realidad. Estas dificultades aparentes son consecuencia de ignorarse los fundamentos de las varias teorías ó ramas que constituyen las ciencias matemáticas.

La propaganda de las ideas es el remedio más eficaz para la desaparición de este mal.

Además de la Escuela politecnica de Francia fundada por Monge, la creación de periódicos como el *Journal de l'École polytechnique*, la *Correspondance sur l'École polytechnique*, los *Annales Mathématiques* de Montpellier, etc., contribuyeron al progreso de la Matemática en esta nación, como en Alemania el *Crelle's Journal* en Inglaterra *Philosophical transactions* y en Italia también multitud de periódicos, cuyo número é importancia aumenta de día en día.

Estas publicaciones periódicas, no solo han dado á conocer los descubrimientos de la actualidad y el verdadero estado de la ciencia, sino que han estimulado siempre para alcanzar nuevos progresos y desarrollos de lo ya conocido; y así se observa cómo todas caminan con

cierto paralelismo, dentro de la variedad que les imprimen los escritores dedicados á cada una de ellas con la variedad de asuntos en ellas desenvueltos, y facilitan además el cambio de ideas en beneficio de un general perfeccionamiento en las múltiples teorías.

Convencidos de que ya se impone la existencia en España de publicaciones periódicas consagradas á la divulgación de los progresos continuados que se verifican en la ciencia matemática, acometemos la empresa de ofrecer el primer número que se publica de nuestro periódico, destinado exclusivamente á tal objeto.

Buscando un término medio entre las publicaciones que existen, nuestro periódico se referirá lo mismo á las cuestiones más elementales que á otras de índole superior, procurando presentar estas últimas en su mayor sencillez, con la más fácil exposición de que sean susceptibles.

Proponiéndonos dar á conocer la Matemática, según las múltiples fases que presenta, en correspondencia con la variedad de sus objetos especiales, daremos á conocer las teorías ú obras notables, ya de los grandes maestros que brillaron en otras épocas, ya de los talentos contemporáneos; ya se tratará de las novedades que en el día mantienen viva la atención de los maestros de la actualidad, ya de ideas ó de conceptos que, sin ser nuevos, tengan alguna importancia ó sean los antecedentes necesarios de alguna nueva teoría.

En una palabra; se atenderá por igual á lo que afecta á la organización científica ó dependencia lógica y á lo que concierne al orden histórico. Se darán á conocer los más importantes descubrimientos ó nuevos desarrollos que adquieran las teorías matemáticas, y se harán las indicaciones precisas que pongan en conocimiento de los lectores las obras útiles ya para el perfeccionamiento de la enseñanza como para la fácil comprensión de la Ciencia.

ZOEL G. DE GALDEANO.

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

La importante evolución que realizó Descartes sometiendo la Geometría al análisis algebraico, llevada á más vastos desarrollos por los nuevos métodos de Newton y de Leibnitz, fueron aminorando la importancia de la Geometría, que llegó á permanecer oculta bajo las for-

mas de inagotable variedad debidas á los nuevos algoritmos, desenvueltos y amplificados por los Bernuilli, Euler y otros muchos analistas, cuyos nombres van unidos constantemente á detalles ó resultados diversos.

A principio de este siglo, la Geometria de Euclides de Pascal y Desasgues aparecia como estacionada ó reducida á estrechos limites, mientras que el analisis parecia desbordarse en todas direcciones, produciendo cierto desequilibrio entre las dos ramas fundamentales de la Matemática. La Geometria, si avanzaba era merced a recursos extraños, y su objeto, envuelto bajo las formas del analisis, no se ofrecia de una manera directa á las investigaciones de los matemáticos

Era necesario, para el desenvolvimiento armónico de la Matemática una reación que tendiese á equilibrar estos dos aspectos generales de la cantidad, que siendo distintos han de compenetrarse y fundirse aún conservando sus leyes propias y características; y esta evolución que habia de hacer posible un desenvolvimiento paralelo de una y otra fué realizado por Monge.

Si la inteligencia, partiendo de los algoritmos por una intuición continuada lleva gradualmente á los más complicados del análisis, por su aplicación inmediata al objeto que ve desenvolverse, alterarse y multiplicarse bajo su dirección, acumulando sistemas de verdades y de relaciones á otros sistemas, también, desde el momento en que Monge creó la Geometria descriptiva, la inteligencia habia de contemplar directamente la extensión bajo sus formas, punto, líneas y superficies para llegar por combinaciones inmediatas á otro sistema de verdades y relaciones. La nueva Geometria, representando clara y fielmente el objeto, tiene como auxiliar la imaginación y se presta á favorecer el desarrollo de las artes, teniendo como base el dibujo ó la representación efectiva de los objetos.

Si la Geometria descriptiva inauguró una época de progreso material por sus aplicaciones beneficiosas para el artista y para el ingeniero, no lo fué menos en el orden especulativo, pues la ciencia pudo crearse una amplia base sobre la cual realizar sus progresos futuros; la representación gráfica de los objetos permitió ayudar á las inteligencias en sus investigaciones. Como dice Dupin, la Geometria descriptiva es una lengua imitativa que tiene la doble ventaja de dibujar y hablar á la vista. «Esta Geometria fortalece eminentemente la imaginación, enseña á abarcar rápidamente y con gran precisión un vasto conjunto de formas, á juzgar de sus analogias y diferencias, de sus re-

laciones de posición y magnitud. El espíritu aprende á ver interiormente, y con una perfecta claridad, líneas y superficies individuales, familias de líneas y superficies; adquiere el sentimiento del carácter de estas familias é individuos, y no solo aprende á verlos aisladamente ó por grupos análogos, sino que los aproxima, los combina y prevee los resultados de sus intersecciones, de sus contactos más ó menos íntimos, etc.» (1)

Las *Leçons de Géométrie descriptive*, de que se hizo una traducción española en el año 1803, además de ser una de las obras que forman época en el progreso científico, es un libro que ofrece la belleza de la sencillez y claridad de estilo, unida á la brevedad que lleva al lector, sin esfuerzo, al conocimiento de todo el sistema de verdades reunidas en un reducido número de páginas. Principia Monge por establecer que los elementos más sencillos, el punto y la recta, no son los más adecuados para la representación sencilla de las figuras, y su razonamiento le lleva á adoptar un sistema de planos rectangulares que reduce á dos, como es sabido. Reproducir el modo de representar un punto, una recta ó un plano, una paralela á una recta, una perpendicular á un plano con la determinación de su distancia, las intersecciones de dos planos, etc., sería exponer lo que hoy se encuentra en todos los tratados destinados á la enseñanza, en los que nada se ha podido modificar de lo que salió perfecto desde su origen. Para la representación de las superficies, observa que no hay ninguna superficie que no pueda considerarse como engendrada por el movimiento de una línea curva, ya de forma constante, cuando muda de posición, ya variable al mismo tiempo, de forma y de posición en el espacio. Además, no es dando las proyecciones de algunos puntos particulares por los que pasa una superficie curva, como se determina su forma y su posición, sino haciendo de modo que para un punto cualquiera se pueda construir la curva generatriz, según la forma y posición que deba tener al pasar por este punto, lo cual depende de la destreza y sagacidad del geómetra y expresa Monge la conveniencia, para la sencillez, de considerar simultáneamente dos generaciones diferentes, é indicar, para cada punto, la construcción de las curvas generatrices, de manera que en la Geometría descriptiva, para expresar la forma y posición de una superficie curva baste dar, para un punto de ésta, del cual una de las

(1) *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, pág. 177.

proyecciones pueda tomarse á voluntad, el modo de construir las proyecciones horizontales y verticales de dos generatrices que pasan por este punto.

Esta consideración de poder ser engendrada una superficie curva por dos generatrices distintas, le lleva á la determinación del plano tangente por medio de las tangentes á éstas en cada punto, y nada hay que decir del modo de resolver el problema, no solo para las superficies cilíndrica y cónica, sino para la determinación del plano tangente á una, dos y tres esferas dadas, problemas que envuelven, según observa Monge, propiedades notables del círculo, de la esfera, de las secciones cónicas y de las superficies del segundo grado, pues de la resolución de estos problemas, empleando las superficies cónicas circunscritas, deduce desde luego la importante conclusión, fundamental para los ulteriores progresos de la Geometría, más recientemente desenvuelta por Carnot, Poncelet, Chasles y los geómetras de la actualidad, de que si se concibe circunscrita á una esfera una superficie cónica, cuyo vértice se mueve según una línea recta, todas las circunferencias de contacto pasarán por dos puntos fijos que serán los de contacto de los planos tangentes trazados por dicha recta, así como recíprocamente, si después de trazar por dicha recta cuantos planos secantes se quiera, se construye para cada sección la superficie cónica circunscrita, los vértices de todas éstas se hallarán en una misma recta; y si en un plano donde se suponen trazadas una circunferencia y una recta, se trazan desde un punto de esta las dos tangentes á aquélla, y se concibe que el punto se mueve en la recta llevándose consigo las dos tangentes, sin que cesen de tocar al círculo, la recta que une los dos puntos de contacto siempre pasará por un punto fijo, verificándose, recíprocamente, que las intersecciones de cada par de tangentes trazadas en los extremos de rectas que pasan por un mismo punto, se hallan en línea recta, y más generalmente si, dada en el espacio una superficie curva cualquiera de segundo grado y una superficie cónica circunscrita que la toca, ésta se mueve sin cesar de ser circunscrita y de tocarla, de modo que su vértice recorra una recta cualquiera: el plano de la curva de contacto de las dos superficies siempre pasará por una misma línea recta (determinada por los puntos de contacto de la superficie de segundo grado con los dos planos tangentes que pasan por la recta de los vértices), y si la superficie cónica se mueve de modo que su vértice esté siempre en un mismo

plano, el plano de la curva de contacto pasará siempre por un mismo punto. En fin, la consideración de las seis superficies cónicas circunscritas á tres esferas, la distribución de sus vértices de tres en tres sobre cuatro rectas, por las cuales pueden trazarse ocho planos tangentes, y en el caso de darse en magnitud y posición cuatro esferas, la importante conclusión de que las seis superficies cónicas circunscritas exteriormente á las mismas deban tener sus vértices en un mismo plano y en las intersecciones de cuatro rectas, así como los de las seis circunscritas interiormente deban estar de tres en tres en un mismo plano con tres de los primeros, son manifestaciones elocuentes de lo espléndida en resultados, de trascendencia suma, que nació la nueva Geometría, y de la fecundidad de la idea que la hizo surgir en la inteligencia del gran geómetra de los tiempos modernos. En todas las cuestiones, citadas como en las que terminan esta obra admirable, á saber, las intersecciones de las superficies, la curvatura y las evolutas de las curvas de doble curvatura, siempre la intuición inmediata del objeto es el fundamento que lleva directamente á la solución de las mismas. Aquellos resultados obtenidos por el razonamiento, ocultos bajo el simbolismo del cálculo, propios de la Geometría cartesiana, se desenvuelven ante la vista bajo el procedimiento gráfico de Monge, que se somete al rigorismo de la Geometría de Euclides, llevada á un grado de pureza tal, que solo aprovecha de la misma cuanto es en absoluto independiente de toda intervención del número ó la medida, de que no se halla en absoluto exento el tratado del geómetra griego.

Pero la obra de Monge no constituye un divorcio entre lo hasta entonces constituido en la ciencia, y este nuevo modo de investigación, que debiera llevarse por nuevos horizontes, consiste en aumentar las direcciones de la inteligencia dentro del plan general con una nueva y sumarla á las demás, para hacer un grandioso conjunto, apoyar la marcha del espíritu investigador en una nueva á la par que sólida base para sus ulteriores progresos. Y, en efecto, donde se detiene esta Geometría representativa avanza el análisis con la eficacia inagotable de sus recursos, y prueba de ello dió Monge en su exposición de la Geometría analítica, á la que imprimió el carácter de su Geometría descriptiva, dando una elegancia hasta entonces desconocida á las formas de sus cálculos y á la marcha de sus operaciones, haciendo destacarse la sencillez del método, no sin agregar nuevos resultados,

como los concernientes á las superficies desarrollables, á las líneas de curvatura y á las aristas de retroceso, á los diferentes generos de inflexión de las curvas de doble curvatura, á las diferentes familias de superficies, y, por último, la aplicación de la teoría de la curvatura de las superficies á la investigación de las propiedades de la superficie envolvente de una serie de esferas de radio variable, cuyos centros se hallan distribuidos en una curva cualquiera, son nuevos puntos de doctrina que, expuestos en sus *Developpements de Géométrie*, aumentan el caudal de la ciencia matemática, al mismo tiempo que Laplace y Lagrange la hacían extenderse.

La actividad infatigable de Monge, no solo produjo una nueva rama en la ciencia, sino que formó una pléyade de inteligencias matemáticas que habían de encauzarse por las nuevas corrientes, como de ello dieron pruebas sus discípulos Meusnier, Carnot, Poinson, Dupin, Poncelet, Gergonne, Briot, Brisson y otros muchos que han contribuido á formar el nuevo edificio cuyas sólidas bases echó el gran geómetra.

(Se continuará).



Sobre la teoría de las formas algebraicas.—LEÇONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEUR, par G. Salmon

Después de haber transcurrido un largo intervalo de tiempo, desde que se publicó el primer fascículo de tan importante obra, traducido de la 4.^a edición inglesa por M. O. Chemin, se han visto satisfechos los deseos de cuantos esperaban con impaciencia su terminación, al ser ya un hecho el haber aparecido el segundo y último fascículo.

Conocido es el éxito, tanto de las obras geométricas, como del notable tratado de Álgebra que la ciencia debe al ilustre profesor del Colegio de la Trinidad de Dublín, por haber contribuido de una manera eficaz á la difusión de las originalísimas teorías cuyo germen se halla en una notable Memoria de Boole (*Cambridge Mathematical Journal*, 1861), si bien, como dice Salmon en sus notas históricas, Lagrange dió la primera idea de invariación (*Mémoires de Berlin* 1773, p. 265) del discriminante de la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$, cuando se reemplaza en ella x por $x + \lambda y$, así como Gauss en sus *Disquisitiones arithmetice* estudió la transformación lineal general en su aplicación á las formas cuadráticas binarias y ternarias, debiéndose el desarrollo

de esta moderna teoría principalmente al matemático Cayley, de cuyas numerosas Memorias publicadas en *Philosophical transactions* tienen conocimiento cuantos se dedican á los estudios matemáticos.

Estas ideas, cuya propiedad pertenece á los matemáticos ingleses, por más que pueda llevarse su origen, como se ha indicado, á los trabajos de Gauss sobre las formas cuadráticas, hallaron eco entre los geómetras del continente, y gracias á la constancia y asiduidad de talentos matemáticos como Hermite, Aronhol, Clebsch, Brioschi y otros, han llegado á constituir un cuerpo de doctrina que ha aumentado el campo de la Geometría de igual modo que el del Análisis.

En pugna la nueva Geometría que fundaron y organizaron los Monge, Poncelet, Chasles y Staudt, según nuevos métodos, con el antiguo método cartesiano, parecía éste amenazado de quedar en lugar secundario ante el rápido progreso de aquélla, cuando hasta principios del siglo actual había tenido una preponderancia indiscutible.

La Geometría moderna poseía métodos propios que permitían acumular el número de sus verdades y de relaciones entre los elementos de la extensión. La dualidad, la correlación y la homografía dilataban de un modo asombroso sus horizontes, y el método cartesiano se iba reduciendo á ser un medio de verificar y generalizar los resultados de la primera. Era, pues, necesario que por un progreso correlativo llegase también á poseer, como la Geometría superior, métodos propios y eficaces para conducirla á teoremas nuevos, á verdades y relaciones geométricas, y este fin lo han realizado los descubrimientos de Boole, Cayley y Sylvester, cuya difusión es debida, muy principalmente, al talento propagandista del profesor Salmon.

El nuevo algoritmo, que pudo considerarse como constituido definitivamente con un carácter y circunscripción propios, desde el momento en que Cayley determinó la existencia de otras funciones, que además del discriminante poseían la propiedad de *invariación*, por efecto de una transformación lineal, se extiende lo mismo por los dominios del Análisis que por los de la Geometría, y no es de extrañar que la obra de que tratamos se refiera á estos dos puntos de vista relacionados también con las obras geométricas del mismo autor.

Yase sabe que *forma*, en la nueva álgebra, es una expresión algébrica racional entera y homogénea, que toda función de los coeficientes de una forma que no cambia de valor, cuando los coeficientes varían por efecto de una sustitución lineal hecha en sus variables, es un *inva-*

riante absoluto de dicha forma, siendo *invariante relativo* ó simplemente *invariante*, cuando el nuevo valor solo difiere del primitivo por una potencia del módulo de la sustitución. Así, por ejemplo, $ac-b^2$ es un invariante de la forma cuadrática binaria

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 ;$$

porque haciendo la sustitución lineal

$$x=pX+qY, \quad y=p'X+q'Y,$$

los nuevos coeficientes de la función de X é Y á que la propuesta se reduce, son:

$A=ap^2+2bpp'+cp'^2$, $B=apq+b(pq'+p'q)+cp'q'$, $C=aq^2+2bqq'+cq'^2$, y la expresión $AC-B^2$, después de efectuadas todas las reducciones, resulta igual á $(pq'-p'q)^2(ac-b^2)$

Si la función arriba considerada es, no solo de los coeficientes, sino también de las variables de la forma, se llama *covariante*, cuando satisface á la relación

$$\varphi(A, B, \dots, X, Y, \dots) = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, x, y, \dots)$$

El *contravariante* es un covariante que, en lugar de las variables $x, y, \dots$ de la forma propuesta, contiene otras variables $\xi, \eta, \dots$ que se hallan transformadas al mismo tiempo que las propuestas, pero por sustitución inversa, es decir, que se hará

$$x=px'+qy'+\dots, \quad y=p'x'+q'y'+\dots$$

$$\text{y } \xi=p\xi'+q\eta'+\dots, \quad \eta=p'\xi'+q'\eta'+\dots$$

No citaremos otro género de formas que además de éstas, como por ejemplo, los *divariantes* ó *covariantes mixtos*, el *hessiano*, etc., son objeto de la obra de Salmon.

Estas formas, como hemos dicho, tienen sus correspondencias geométricas. Así, un invariante de una forma ternaria ó cuaternaria es en geometría una función de los coeficientes, cuya reducción á cero expresa alguna propiedad de la curva ó de la superficie independiente de la elección de ejes, como por ejemplo, la existencia de un punto doble. Un covariante representa otra curva ó superficie cuyos puntos tienen con la curva ó superficie dada alguna relación independiente de la elección de ejes. El resultante de un sistema de ecuaciones, igualado á cero, indica que las curvas correspondientes deben pasar por un punto común.

La reducción á cero del discriminante de la ecuación de una curva ó de una superficie expresa la condición necesaria para que esta curva ó superficie tenga un punto doble en Geometría plana, si x, y, z

representan las coordenadas *trilineales* de un punto, y $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ la ecuación de una recta, ξ, η, ζ pueden llamarse las coordenadas *tangenciales* de ésta, y se observa que, cuando las coordenadas de un punto se transforman por una sustitución lineal, las coordenadas tangenciales de una recta se hallan transformadas por sustitución inversa, como en la Geometría del espacio las coordenadas tangenciales de un plano y las de un punto se transforman por sustituciones inversas.

También es ya muy conocido el empleo que la nueva Álgebra hace de los métodos simbólicos de tal modo, que se emplean los símbolos de operaciones como si fueran simplemente cantidades.

Ejemplo de ello es el método de Cayley para la formación de invariantes y de covariantes, reducido á que, si se dan varias formas $U, V, W, \dots$, podemos escribir las variables $x, y, \dots$ de u con el índice 1, las de v con el índice 2, y efectuar en seguida en ellas la operación expresada por el símbolo

$$\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1},$$

ó por una potencia de este símbolo, que representa Cayley por $\overline{12}$, para el caso de dos variables, ó en general por $\overline{12}^a, \overline{23}^b, \overline{31}^c$, si las funciones tienen dos, tres, $\dots$ variables.

Este procedimiento, modificado por Aronhold y Clebsch, se halla reducido á sustituir $x_1, x_2, x_3, \dots$ por $x, y, z, \dots$, afectando los coeficientes con los índices correspondientes á las variables á que multiplican. Así, las formas ternarias de tercero y cuarto grado se hallarán designadas por las notaciones $\sum a_{ikl} x_i x_k x_l$, $\sum a_{iklm} x_i x_k x_l x_m$, pudiendo recibir los números i, k, l, m los valores 1, 2, 3, 4, y debiendo verificarse en esta notación que $a_{ikl} = a_{iki} = a_{kii} = \dots$, etc.

También, para obtener un invariante de un sistema de dos formas $ax^n + \dots, a'x^n + \dots$, cuando se conoce un invariante de la primera, se efectúa sobre ésta la operación $a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots$, y para obtener el primero, segundo, tercero, $\dots$ *emanante*, se efectúa sobre ella la operación

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + \dots \right)^p$$

Estas indicaciones revelan suficientemente el carácter simbólico del Álgebra de las formas, hoy bastante conocida, para que esto nos evite el entrar en más detalles.

Ahora vamos á indicar brevemente algunas de las mejoras de más importancia que se encuentran en la última edición de la obra en cuyo examen nos ocupamos.

Difundidas hoy las ideas de esta nueva rama de la Matemática hasta el punto de haberse hecho generales aplicaciones, tanto al Análisis como á la Geometría, y de constituir uno de los asuntos más frecuentemente desenvueltos en libros y publicaciones, en la última edición ha creído el traductor indispensable dar á conocer muchas de las cuestiones suprimidas en la anterior y todo lo nuevo, que no es poco, agregado por el profesor Salmon, á quien se debe una vez más la vulgarización de los más notables resultados que han extendido los límites de la nueva Álgebra.

Entre las innovaciones más importantes se halla la exposición de los *determinantes simétricos* y *gauchos simétricos*, objeto de la Lección 5.ª, cuyos elementos conjugados son iguales dos á dos ($a_{rs}=a_{sr}$) ó iguales y de signo contrario, determinantes que tienen nulos los elementos de la diagonal principal, por ser ellos sus propios conjugados, demostrando que, *un determinante simétrico gauchó es un cuadrado perfecto*, refiriendo el cálculo de los determinantes simétricos gauchos al cálculo de las funciones llamadas por Cayley *determinantes gauchos*, en las que los términos principales a_{ii} , a_{kk} , ... no son nulos, exponiendo cómo este geómetra ha aplicado la teoría de los determinantes gauchos á la teoría de las sustituciones ortogonales, es decir, tales que se tenga

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = X^2 + Y^2 + Z^2 + \dots,$$

y que se pueden obtener los coeficientes de una transformación ortogonal en función de $\frac{1}{2} n(n-1)$ variables independientes.

Otra de las adiciones, verdaderamente importante, que se observa en la última edición de la de Salmon es la de la lección diez y seis, dedicada á los sistemas de funciones. En ella se trata del *combinante* de un sistema de formas ó sea, un invariante que no altera (salvo un factor), no solo cuando se verifica en las variables una transformación lineal, sino cuando se reemplaza una cualquiera de las formas por una función lineal de las mismas. Esto conduce á que, suponiendo dos funciones binarias u y v del mismo grado, la forma $u + kv$, en la cual se da á x diferentes valores, representa un sistema de formas que constituyen una *involución* con u y v , y haciendo $y=1$ en una cualquiera de las formas, representará n puntos situados en el eje de la x , y como en $2(n-1)$ casos, dos de los puntos n representados por $u + kv$ coinciden,

resulta que la involución tiene $2(n-1)$ puntos dobles, é igualando á cero el jacobiano de u y v , se obtienen los $2(n-1)$ puntos de la involución determinada por u y v , así como para una forma cúbica ternaria el jacobiano de u, v, w es el lugar de los puntos dobles de todas las curvas del sistema $u+kv+lw$ que tienen puntos dobles, sucediendo lo mismo para las formas de un número cualquiera de variables.

Cuando $(x-\alpha)^3$ es factor de $u+kv+lw$, $x-\alpha$ será factor en las tres derivadas segundas

$u_{11}+kv_{11}+lw_{11}=0$, $u_{12}+kv_{12}+lw_{12}=0$, $u_{22}+kv_{22}+lw_{22}=0$, y eliminando l y k , $x=\alpha$ satisfará á la ecuación

$$\begin{vmatrix} u_{11} & v_{11} & w_{11} \\ u_{12} & v_{12} & w_{12} \\ u_{22} & v_{22} & w_{22} \end{vmatrix} = 0$$

que da los puntos simples del sistema $u+kv+lw$.

Otras importantes aplicaciones geométricas se encuentran en la misma lección. Investigando lo que corresponde á los resultados obtenidos en el caso de las formas binarias, á las formas ternarias y cuaternarias, se llega á establecer que el discriminante de $u+kv$ contiene un factor elevado al cuadrado cuando las curvas representadas por u y v son tangentes entre sí, además el discriminante contendrá un factor elevado al cuadrado, si u tiene un retroceso ó dos puntos dobles.

Esto conduce á la consideración del *tact-invariante* ó condición para que dos curvas sean tangentes, cuestión expuesta en la *Analytic Geometry of three dimensions* y á la teoría general de la clase de invariantes llamada por Sylvester *osculantes*.

De dos formas ternarias que geoméricamente representan dos curvas se obtiene, eliminando una variable, una forma binaria que corresponde á los puntos de intersección de aquéllas, y recíprocamente, podemos suponer una forma binaria deducida de un sistema de dos formas ternarias, haciendo

$$X=\varphi(xy), \quad Y=\psi(xy), \quad Z=\chi(xy).$$

En el caso particular de ser la transformación lineal $X=x^2$, $Y=2xy$, $Z=y^2$, por la eliminación de x é y se obtiene la relación determinada $4XZ-Y^2=0$, y operando esta transformación, por ejemplo, en la forma cuadrática binaria $ax^2+2bxy+cx^2$, ésta queda reemplazada por el sistema $aX+bY+cZ$ y $4XZ-Y^2$ que representa geoméricamente los dos puntos de intersección de una recta y una cónica, y como el discriminante de una ecuación algebraica igualado á cero expresa la

condición necesaria para que esta ecuación tenga raíces iguales, correspondiendo á un punto doble de una curva ó de una superficie, en este caso la recta será tangente á la cónica, y cuando se trate de un sistema de dos formas cuadráticas, el invariante del sistema binario $ac' + ca' + 2bb'$, que es también un invariante del sistema ternario igualado á cero, expresa que las rectas son polares armónicas con respecto á la cónica.

También tiene considerable aumento la décima séptima lección, que trata de las *Aplicaciones á las formas binarias*.

La resolución de la ecuación de 4.º grado ofrece importantes simplificaciones tomadas de los últimos trabajos de Cayley y Burnside, hallándose desarrolladas las consideraciones de este último sobre la identidad de la teoría de la cuártica con la de dos secciones cónicas. En fin, los últimos resultados debidos al matemático Sylvester, acerca del criterio de las raíces reales de las ecuaciones de 5.º grado, á M. Hermite sobre las condiciones de realidad de las raíces por la aplicación del teorema de Sturm á una *forma tipo* á que es reducible la quintica, considerables desarrollos acerca de la forma de 6.º grado y los últimos capítulos destinados al orden de los sistemas de ecuaciones sometidas á restricciones y á la aplicación de los métodos simbólicos, constituyen un caudal de doctrina con que se ha enriquecido la última edición de la obra del profesor Salmon.

SOBRE LA TEORIA DE LOS NUMEROS

Prolegòmenos de Aritmética universal, por D. Cecilio Giménez Rueda

Desde que en el año 1844 publicó Grassmann su célebre obra *Die Ausdehnungslehre* (tratado de la extensión), la teoría de los números, que sobre tan firme base estableció Gauss, se encaminó por nuevos derroteros que la habían de conducir á organizarse con caracteres especiales donde predominaran las leyes combinatorias del cálculo. Grassmann, considerando la Matemática como el tratado de las formas ideales producidas por la inteligencia, distinguió las formas algebraicas de las formas combinatorias, resultantes respectivamente de la igualdad y de la desigualdad, refiriéndose la primera á la forma y la última á los elementos de la generación. Así, pues, divide las formas

discretas en número y combinación, siendo la forma discreta combinatoria la reunión de lo tomado como igual y la combinación el conjunto de lo tomado como diverso, de donde resulta la ciencia de lo discreto dividida en la ciencia del número y de la combinación. De igual manera la forma permanente, ó sea la magnitud, resulta dividida en forma permanente algébrica ó magnitud intensiva y forma permanente combinatoria, originadas respectivamente, como se dijo, por la igualdad y la desigualdad.

Considerando Grassmann las magnitudes de un modo muy general, ó las formas enlazadas, adopta como signos de enlace, no los de las operaciones conocidas, sino los siguientes $\sim, \vee$ que expresan dos modos de relacionarse inversos, y llega á un cálculo puramente formal de las magnitudes, á una ciencia que trata de un modo completamente general de magnitudes abstractas, cuyas imágenes concretas son las figuras del espacio (líneas, superficies, cuerpos), y que al considerarse geoméricamente tienen una representación concreta.

Hankel, uno de los más caracterizados continuadores de este orden de ideas, estableció su principio de la permanencia de las leyes formales considerando objetos mentales ó relaciones de objetos que pueden imaginarse enlazados de una manera puramente conceptual ó formal, y á la vez, como resultado del enlace, una nueva relación que por poderse tomar en lugar de los anteriores, en cuanto se hallan relacionados para toda deducción ulterior, suele considerarse como idéntica al mismo.

Si dicho enlace se verifica de un modo ordenado ó regular y sometido á ciertas reglas, se comprende desde luego que, entre los resultados de los diferentes enlaces, pueden tener lugar nuevas relaciones, consecuencias de las primitivas, y pueden ser deducidas de éstas como consecuencias lógicas completamente independientes de la naturaleza de los objetos enlazados. Así, pues, al definir las reglas de los enlaces puramente formales, esto es, de las operaciones que se practican con los objetos mentales, queda á nuestro arbitrio la definición, con solo establecer una condición esencial, á saber, que no debe existir implícitamente ninguna contradicción lógica; y para quedar convencidos de que no puede existir ninguna contradicción lógica en cualquier conjunto, debemos formular las leyes tan independientes entre sí, que ninguna de ellas afecte á las otras. Además, añade Hankel, para no caer en lo abstruso al establecer tal sistema de operacio-

nes, hay que someterlas á reglas formales tales, que en ellas se encuentren contenidas las operaciones actuales con objetos reales y con los números que expresan sus relaciones, pudiendo servir como base la Aritmética general, todo lo cual implica el principio de la permanencia de las leyes formales: *si dos formas expresadas por signos generales de la Aritmética general son iguales entre sí, también seguirán siendo iguales cuando los signos cesan de representar magnitudes simples, y por tanto, también las operaciones llegan á referirse á otro contenido cualquiera.*

No insistiremos en desarrollar los principios de esta rama especial de la Matemática, cuya importancia se ha elevado á alto grado por efecto de los trabajos de Boole en la lógica algebrica, los de Hamilton, Peirce y otros sobre el cálculo formal que divulgó el notable profesor Houël en su *Théorie élémentaire des quantités complexes* y hasta en su introducción á su *Cours de calcul infinitésimal*. Si hemos insistido acaso demasiado en las ideas fundamentales que se encuentran en las obras de Grassmann y Hankel, es porque hoy constituyen los fundamentos ó puntos de origen de cuantos tratados se escriban sobre la teoría de los números. Entre éstos, seguramente que la obra del matemático alemán Stolz es uno de los más apreciables y dignos de ser estudiados.

El doctor D. Cecilio Giménez Rueda ha acometido la loable empresa de ofrecer al público un resumen de la teoría de los números, con el título de *Prolegómenos de Aritmética universal*, y ha mostrado gran acierto en elegir, entre otras direcciones, como dice en su prólogo, el plan seguido por el sabio profesor de la Universidad de Innsbruck; pero no se ha limitado á seguir dicha obra en sus puntos capitales, sino que con propio criterio ha sabido dar unidad, claridad y sencillez á la exposición de la ciencia de los números, demostrando al propio tiempo que posee un recto criterio en el modo de apreciar muchas cuestiones concernientes á la enseñanza y exposición de la Matemática, y en particular relativas á conceptos erróneos ó mal definidos y que se han ido transmitiendo por costumbre inveterada, tanto en los libros como en las aulas.

En efecto, los conceptos de magnitud, de cantidad y de número se confunden con bastante frecuencia; y la definición de cantidad, *lo que puede sufrir aumento ó disminución*, se presta á una interpretación inexacta; se nota la falta de precisión en algunos tratados, cuando se

interpretan las cantidades imaginarias, etc.; y en cuanto á la indiferencia que muestran muchos por determinadas especulaciones científicas, mucho podría haber añadido, para hacer visible lo ilógico y anticientífico de la pregunta eterna ¿para qué sirve eso?, verdadera rémora á todo progreso, dirigida ciertamente por quienes no han de contribuir al mismo.

Después de precisar los conceptos de homogeneidad y heterogeneidad, magnitud, unidad, pluralidad, cualidad y modalidad en las magnitudes, cantidad y número, igualdad y desigualdad, pasa á exponer en el capítulo primero los sistemas de magnitudes y números, que los divide en seis: el primero llamado *natural*, que comprende las magnitudes en que se comprende un solo carácter común, cuya determinación se efectúa, contando las veces que en cada una de ellas entra la unidad ó elemento generador, siendo sus signos los *números naturales*. El segundo sistema parte de considerar una unidad ficticia M susceptible de dividirse en sub-unidades que forman el de los *números racionales absolutos*; el tercero se funda en la consideración de magnitudes lineales que comprende las *magnitudes incommensurables respecto de su unidad* y los *números irracionales*; estos *sistemas continuos* le llevan á las ideas de *función* y de *límite*. En fin, los últimos sistemas son los de las *cantidades reales*, los de las *cantidades complejas* y los números complejos de tres unidades de la forma $au_1 + bu_2 + cu_3$, terminando en la consideración del *cuaternio*.

El capítulo segundo se halla destinado á las *combinaciones ó operaciones fundamentales del cálculo aritmético* destinado á tratar de las *relaciones formales*, donde con sencillez y orden expone la teoría de las operaciones seguidas según los principios de Grassmann y conforme al perfeccionamiento dado á la exposición por el profesor Stolz, saturado todo de importantes notas y consideraciones, donde recorre el señor Giménez Rueda la serie de formas actuales que comprenden las operaciones fundamentales de la Aritmética, para que al entrar de lleno en el estudio de las relaciones formales puedan ser presentadas paralelamente á ellas la serie de las formas actuales que comprenden.

En el capítulo tercero, destinado á las *combinaciones formales de la teoría analítica de los números*, abandona la notación del cálculo ordinario para adoptar los símbolos generales del cálculo combinatorio, exponiendo en su generalidad las leyes *asociativa*, *conmutativa* y *distributiva*, el *principio de la permanencia de las leyes formales* y los teoremas

principales, aproximándose al plan del profesor últimamente citado, sin dejar de guiarse por su iniciativa propia. Así, pues, distinguiendo las varias categorías de cantidades por símbolos especiales $\bigcirc$, $\odot$, y designando con las palabras *tesis* y *ánálisis* las operaciones directa e inversa de cada categoría, extiende el caso de ser asociativa una combinación sintética para tres números cualesquiera, al caso de ser más de tres; demuestra que si una tesis asociativa es conmutativa para dos números, también lo es para mas de dos, etc.

Como ejemplo de la claridad con que procede el Sr. Giménez Rueda en sus demostraciones, nos bastará indicar cómo llega a establecer que: para hacer una combinación sintética entre dos combinaciones analíticas, se combinan sintéticamente sus dos primeros términos entre sí, luego los segundos, y por último, se asocia analíticamente al primer resultado.

Supongamos $(a \bigcirc b) \bigcirc (a' \bigcirc b') = x$.

Asociando $(b \bigcirc b')$ á sus dos miembros, resulta:

$$\begin{aligned} x \bigcirc (b \bigcirc b') &= (a \bigcirc b) \bigcirc (a' \bigcirc b') \bigcirc b \bigcirc b' = \\ &= (a \bigcirc b) \bigcirc b \bigcirc (a' \bigcirc b') \bigcirc b' = a \bigcirc a'; \end{aligned}$$

luego $x = (a \bigcirc a') \bigcirc (b \bigcirc b')$,

de manera que

$$(a \bigcirc b) \bigcirc (a' \bigcirc b') = (a \bigcirc a') \bigcirc (b \bigcirc b')$$

Como aplicaciones enuncia las siguientes: La suma de dos diferencias indicadas se obtienen sumando los minuendos y de esta suma restando la de los sustraendos.

El producto de dos cocientes es igual al producto de sus dividendos partido por el de sus divisores.

Pero en el capítulo 3.º solo trató de sistemas restringidos por la condición de que los símbolos analíticos empleados sean posibles y de una sola significación. En el capítulo 4.º hace una ampliación del sistema de números, y da una nueva extensión de las leyes formales á las relaciones con números del nuevo sistema.

Presenta nuevas cantidades que satisfagan á la igualdad $b \bigcirc x = a$ (1) y con las cuales se pueda calcular conforme á las mismas reglas que con las magnitudes primitivas. Para ello admite que, cuando la referida igualdad no se verifica por ninguna de las cantidades de aquel

(1) En un caso particular seria: sustraendo mas resto igual á minuendo, ó divisor por cociente igual á dividendo.

sistema, existe un nuevo objeto, siquiera sea la relación mental $a \cup b$ que la verifica, lo cual es posible, puesto que

$$b \cup (a \cup b) = (a \cup b) \cup b = a;$$

y de esta entidad $(a \cup b)$, como objeto mental, que en un principio no posee más propiedad que su existencia racional parte, para atribuir á los nuevos objetos las relaciones analíticas antes consideradas, y para llegar á obtener como comprendidas en el concepto general de *magnitud* las nuevas entidades.

No nos detendremos en seguir la manera de establecer las relaciones entre las antiguas y las nuevas magnitudes hasta el punto de resultar como *homogéneas* y de no presentar ya ninguna *imposibilidad* en las combinaciones analíticas, ni trataremos de reproducir el modo de extender las leyes formales en el sistema amplificado. Todo esto puede quedar para el que desee conocer los principios fundamentales de la Aritmética universal en la obra del Sr. Giménez Rueda, que en pocas páginas facilita la adquisición de los conocimientos fundamentales de la Teoría de los números, y permite el dominar sin trabajo las dificultades de otras obras más extensas.

Y ¡cuántos más frutos que los que actualmente consigue la enseñanza no obtendría, si se adoptara ese proceso generalizador que busca lo esencial de cada conocimiento en la teoría y se aleja de esas manipulaciones estériles de reglas particulares y circunscritas á objetos especialísimos con que se abrumba á las inteligencias y se las acostumbra al espíritu de detalle que tanto se aleja del espíritu de universalidad propio de la verdadera ciencia!

ZOEL G. DE GALDEANO.

VARIETADES

Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter abschnitt, Leipzig—1890—1 v. 4.º, 554 páginas. Esta segunda parte de la obra que publica el profesor de la Universidad de Leipzig Herr Sophus Lie, de la cual la primera parte se publicó hace dos años, aún tendrá una tercera y última, según está anunciado.

Dicha obra tiene por objeto hacer un desarrollo especial del *concepto de los grupos* con que se ha enriquecido la Matemática moderna,

á partir de los trabajos de Galois y del profesor de la Escuela política de París M. Camille Jordán.

La teoría de las sustituciones, ampliamente desarrollada en la obra magistral de este matemático, es una síntesis de cuanto constituye esencialmente la teoría algebraica de las ecuaciones, que han contribuido á organizar, después de Lagrange, Cauchy, Abel, Galois, Hermite y el citado M. Camille Jordan, á quien se deben importantes descubrimientos en esta rama del Álgebra. Pero la teoría en cuestión se ha extendido en los últimos años considerablemente, saliendo de los dominios del análisis puro y aplicándose á las teorías geométricas, así es que la obra del profesor Herr Sophus Lie tiene un determinado carácter, y los conceptos en ella contenidos están relacionados con los trabajos del profesor Klein, que ha desenvuelto, entre otras, la teoría de las transformaciones en el espacio en su correspondencia con las propiedades proyectivas de las figuras, así como los matemáticos franceses Poincaré y Picard, que han tratado de los *grupos discontinuos* finitos é infinitos, á quienes se debe importantes resultados en la teoría de las funciones; pero el profesor Herr Sophus Lie se propone dar á conocer una teoría general de los *grupos continuos finitos*. La primera parte de su obra está dedicada á establecer las propiedades generales de los mismos. La segunda parte, publicada poco há, comprende la teoría general de las *transformaciones de contacto de los grupos finitos y de los grupos de tales transformaciones*.

Las cinco subdivisiones de que consta, tratan de: El concepto de las transformaciones de contacto, la teoría-invariante de las transformaciones de contacto, las transformaciones de contacto infinitesimales, los grupos de transformaciones de contacto é investigaciones especiales sobre estos grupos, y en todo ello se contienen nuevos métodos de integración y el desarrollo de las correspondencias geométricas en el plano y en el espacio ordinario ó de tres dimensiones con el concepto de los grupos.

*
* *

Sulle corrispondenze ($m_1 m_2 \dots m_r$) continue che si possono stabilire tra i punti di r gruppi (di Ricardo de Paolis á Pisa).—Esta Memoria, publicada en los *Annali di Matematica pura ed applicata*, dirigida por el profesor Brioschi, se refiere, como la obra anteriormente citada, á la teoría de los *grupos continuos*, y permite al lector adquirir con faci-

lidad las ideas capitales de esta nueva teoría, especialmente desde el punto de vista geométrico.

Definiéndose la *variedad* (correspondiente á la *Mannigfaltigkeit* de los matemáticos alemanes) como los diferentes modos de determinación que puede admitir un concepto geométrico, de la cual aquéllos son los *elementos*, y el grupo, como un conjunto de elementos, después de considerar el elemento r -plo ó múltiplo según r , es decir, que deba considerarse como perteneciente á un grupo r veces y no más que r , el grado del grupo expresado por el número de sus elementos, el grupo de grupos ó *agrupamiento*, determinando el grado de éste el número de grupos en él contenido, pasa á examinar el Sr. de Paolis el espacio y sus elementos geométricos, puntos, líneas, superficies y sólidos, cuyos grupos son las *figuras* ó *formas geométricas*, y después de tratar de los grupos geométricos continuos, llega al asunto principal de su trabajo, comenzando por la correspondencia (m, n) continua entre los puntos de dos grupos.

Sean dos grupos G^m y G^n de elementos M y N , y supongamos que todo elemento M determina n elementos correspondientes N , y solo n , mientras que todo elemento N corresponda á m elementos de M , y solo á m , entonces quedará establecida una correspondencia (m, n) entre los dos grupos, y para distinguir entre sí las leyes por las que se pasa de los elementos M á los N y de éstos á aquéllos, la llama correspondencia *directa* é *inversa*, y cada uno de dos elementos correspondientes se dice *polo* del otro. Además, si g' y g'' son dos grupos respectivos de G^m y de G^n , hallándose g'' constituido por todos los polos de todos los elementos de g' , se dice que g'' es el *grupo polar* de g' , ó también el *grupo correspondiente* á g' .

De igual manera, si se trata de r grupos, cuyos elementos respectivos son $M^1, M^2, \dots, M^r$, y todo grupo $G_{r-1}(M^1, M^2, \dots, M^{r-1})$ determina m_r elementos correspondientes $M_1^r, M_2^r, \dots$, y solamente m_r , mientras que cada uno de ellos corresponda también á $r-2$ elementos $M^1, M^2, \dots, M^{i-1}, M^{i+1}, \dots, M^{r-1}$, tomados de cualquier modo en los respectivos grupos, juntamente con cada uno de los m_i elementos M^i , y solo juntamente con cada uno de ellos, entonces se dirá que se halla establecida una correspondencia $(m_1, m_2, \dots, m_r)$ de clase $p=r-1$ entre los r grupos G^m , y para distinguir la ley por la que de los grupos:

$$G_{r-1}(M^1, M^2, \dots, M^{r-1}),$$

se pasa á los elementos correspondientes M^r , de aquella por la cual de los grupos:

$$G_{r-1} (M^1, \dots, M^{i-1}, M^{i+1}, \dots, M^r),$$

se pasa á los elementos correspondientes M^r , se llama la primera *correspondencia directa* y *correspondencia inversa* cada una de las otras $r-1$.

Respecto á una correspondencia $(m_1, m_2, \dots, m_r)$ se llama *polo* de un grupo $G_{r-1} (M^1, \dots, M^{i-1}, M^{i+1}, \dots, M^r)$ cada uno de los m_i elementos correspondientes á él.

De los conceptos indicados se pasa, en la Memoria de que se da aquí una breve reseña, á los de *grupo polar* y *grupo autopolar* respecto á la correspondencia dada que es el polar de sí mismo, la *agrupación polar* constituida por grupos, y en fin, se trata de la *correspondencia involutiva*, la *involución polar*, la *correspondencia continua*, etc.

*
* *

Felice Casorati.—En el último tercio del año pasado, las ciencias matemáticas han perdido en Italia uno de sus más distinguidos propagandistas, con la muerte del profesor de la Universidad de Pavia, Felice Casorati.

Figuraba entre los notables matemáticos Brioschi, Cremona, Betti y Beltrami, tan conocidos en el mundo científico, como redactor del periódico *Annali di Matematica pura ed applicata*, donde puso á prueba las excepcionales condiciones de su talento con la publicación de numerosas é interesantes Memorias, cuyo examen exigiría mucho espacio; pero entre todas sus obras hay una que debe ser citada, porque en ella el lector puede admirar las dotes de expositor y propagandista que poseía, así como el completo dominio de una doctrina nueva á la par que profunda, y á cuya vulgarización en Italia contribuyó de una manera eficaz.

Las Memorias de Cauchy contenidas en los tomos 3.º y 4.º de sus *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (de 1840 á 1847), *sur les fonctions des variables imaginaires et sur la théorie des quantités géométriques et sur leurs applications*, dieron principio á una nueva evolución del Análisis, en que tomaron parte muy principal los matemáticos franceses Puiseux, Liouville y Hermite, y que dió origen en Alemania á una nueva dirección seguida por Riemann, y con esto á dos maneras de exponer y desenvolver la teoría de las funciones de variables imaginarias ó complejas.

Casorati, para exponer su teoría, tuvo en cuenta la evolución realizada en uno y otro sentido, y con el fin de preparar su trabajo, basado todo él en los descubrimientos y puntos de vista de los matemáticos de Francia y Alemania, comienza á referir el progreso que hizo la teoría de las funciones trascendentes desde los trabajos de Fagnani y Euler hasta los propagandistas de las ideas de Riemann, y en el resumen histórico que hace, á la profundidad de juicio y á una vasta erudición se ve unido un completo dominio del asunto, y como resultado de todo esto, el hallarse sintetizado en un corto número de páginas cuanto de esencial hay en la evolución de esta rama del Análisis.

La idea capital de la obra es que el concepto de función no implica necesariamente la hipótesis de un modo de expresarse con los símbolos del Análisis, adoptando la moderna tendencia de ésta, por la cual las propiedades de las funciones constituyen lo esencial de cada entidad, así como las expresiones analíticas los accidentes de la misma; y cuando una función está dada por una expresión analítica, reconoce la conveniencia de establecer un criterio analítico con el objeto de decidir, si *para un valor c de la variable de una función $f(x)$ es continua y finita*, lo que se expresa por la fórmula

$$f(c+\eta) - f(c-\epsilon) < \epsilon.$$

El modo de tratar Cauchy los números complejos como *cantidades geométricas*, y de aquí el considerar como *función* de una variable compleja z una cantidad geométrica w cuyo valor resulta determinado por el de la primera, es decir, el admitir que w sea función de z siempre que una posición del punto z determine la posición del punto w , y la definición de Riemann: *Una variable w se dirá función de otra variable compleja z , cuando varía con ésta de modo, que el valor de la derivada $\frac{dw}{dz}$ sea independiente del de la diferencial dz* , constituyen el punto de partida para la exposición que hace Casorati en su obra, conciliando estos puntos de vista fundamentales en el desenvolvimiento de la teoría, por más que, en general, tiene preferencia el método de exposición de Riemann. Así, por ejemplo, al tratar el caso de la función $w=z^2$, considera las variaciones simultáneas de w y de z en dos planos distintos, sometidas á las relaciones

$$\arg w = 2 \arg z, \quad \text{mod } w = (\text{mod } z)^2,$$

sensibilizando el modo de hallarse situados los puntos correspondientes á las rectas móviles R_z , R_w de los dos planos, mediante la conside-

ración de dos sistemas de hilos, rectilíneo indefinido el uno y circular el otro, cuyas intersecciones son aquéllos, y la circunstancia de recorrer R_w su plano con velocidad dupla, ó en general n -upla, en el caso de la relación $w=z^n$, le lleva á considerar una red de dos ó de n hojas en el plano de las w formada por los puntos correspondientes á los diversos valores de R_z en el plano z , y á obtener, conforme á la idea de Riemann, una región continua constituida por las hojas sobrepuestas que contiene la totalidad de los valores de la función, resultando dos redes ó tejidos que comprenderán, respectivamente una vez el plano de las z y dos el de las w , y tales, que á un punto de la una corresponda siempre uno, y solo uno de la otra, siendo la red ó tejido w la deformación de la z prescrita por la función $w=z^2$, como la z puede indicar la deformación de la función $w=z^{\frac{1}{2}}$ de la variable independiente, todo lo que se aplica análogamente al caso de la función $w=z^n$. En fin, z , que tiene n valores con respecto á w resulta de un solo valor, ó totalmente representada, respecto al correspondiente de la red ó superficie de n hojas.

La *Teorica delle funzioni di variabili complesse* es, en resumen, una obra que presenta enlazados y conciliados los más importantes resultados obtenidos por Cauchy, Puiseux, Riemann y Newmann, y en esta obra de unificación se distingue el claro talento del expositor de tan varias doctrinas, á las que ha agregado algo propio, según puede observarse examinando el desarrollo que da á cuestiones tan importantes como la clasificación de las funciones, las series y productos infinitos y el importante capítulo dedicado á las integrales.

* *

Schroeder. *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (exakte Logik). —Esta nueva obra del autor de *Operationskreis des Logikkalküls*, próxima á aparecer, según hace tiempo está anunciando, promete ser un acontecimiento altamente satisfactorio para los que siguen la evolución de esta Álgebra especial, cuyo origen se halla en los trabajos de Boole y de Jevons, y con mayor motivo por manifestar previamente su autor que ha de constituir una exposición y desenvolvimiento de los últimos progresos debidos en esta teoría al matemático norteamericano Sir Charles Peirce, cuyos trabajos son de reconocida importancia en este género de investigaciones.

Zaragoza.—Establecimiento tipográfico de Julián Sanz.