

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

EXPOSITION DE LA THÉORIE DES INTÉGRATEURS

PAR M. G. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT LOUIS, A PARIS

1. On sait que l'on nomme : *Intégraphes, planimètres, sommateurs ou intégrateurs* des instruments dont le but principal est l'évaluation des aires des surfaces planes.

D'après ces instruments, en assez grand nombre (*), le planimètre polaire de Amsler est celui qui, pour plusieurs raisons (**), semble appelé à l'emploi le plus fréquent. Les applications des planimètres sont nombreuses; les contributions directes, les administrations du cadastre et des forêts, le service topographique du génie.

(*) Nous citerons notamment les intégraphes de M. M. Nàpoli et Abdank-Abakanowicz. Dans la séance du 13 Décembre 1883, à l'Institut de France, ont pu lire un rapport de M. M. Bertrand et Jordan sur une question de priorité soulevée par M. Mestre relativement à cet intégraphes.

(**) Dans l'article intitulé *Note sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler dans le dessin de la Fortification*, note écrite en Avril 1863 et publiée dans le *Mémorial de l'officier du génie* 1874 (Gauthier-Villars) par le général Peaucollier, alors capitaine, l'auteur dit, en forme de conclusion : « En terminant ces considérations nous ferons remarquer encore une fois combien le planimètre polaire est bien approprié à notre mode de représentation graphique et au dessin de la fortification. Il est précis et d'un maniement extrêmement facile; son volume n'est guère supérieur à celui d'un compas de réduction et le prix en est peu élevé. En résumé, cet instrument réunit tous les avantages et semble destiné à rendre de véritables services aux officiers du génie, en leur épargnant une des parties les plus ardues et cependant des plus essentielles, de l'étude d'un projet de fortification. »

Une note sur le planimètre polaire de Amsler, due à M. Laisant (Note qui nous a été signalée par M. Neuberg) a paru dans les *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (2.^e série, t. I, p. 385; 1876.)

Elle a été reproduite dans la *Nouvelle correspondance* (t. V, 1879; pp. 39, 71 et 117) (Dans cette Note, la valeur de la constante est exactement exprimée étant donné que la roulette est placée entre le style et le point d'articulation, comme le veut l'auteur (pp. 40, 41; mais elle serait en contradiction avec l'instrument, tel qu'il est figuré (*loc. cit.*; p. 72.)

les architectes, les ingénieurs, les géomètres arpenteurs, etc. . . . ont recours à ces instruments pour résoudre ce problème si délicat de la détermination des aires planes à contours curvilignes.

En Allemagne, à ce qu'on m'a dit, on possède un planimètre, comme on a une boîte de compas, et si, en France, l'usage en est encore peu répandu, il n'est pas douteux que cet instrument, quand il sera plus connu, jouira de la même faveur. Les personnes qui font usage du planimètre, les professeurs qui pourront être consultés à son propos, seront peut-être bien aises de connaître une théorie de cet instrument; c'est cette théorie, absolument géométrique et tout à fait élémentaire, que nous allons exposer ici.

2. Réduit à son expression théorique, le planimètre d'Amshler se compose de deux tiges rigides articulées en C: la première AP pivote autour d'un point fixe P, de telle sorte que l'articulation A décrit toujours un cercle de centre P et de rayon PA; nous l'appellerons le *cercle polaire* et nous désignerons son rayon par R.

L'autre tige AS porte: 1.^o à son extrémité une pointe ou *style* S; 2.^o, en un point R, une roue qui est mobile dans un plan perpendiculaire à la tige. D'après cela on comprend déjà que si la tige AS est mobile sur son prolongement, la roue R éprouve un mouvement de glissement, sans aucun effet sur la rotation.

En d'autres termes, ce mouvement ne produit aucun effet; la roue n'enregistre rien. Au contraire, lorsque AS éprouve une rotation autour du point A, R décrit un arc de cercle, de centre A; et dans ce mouvement, qu'on peut nommer *mouvement de roulement*, pour le distinguer du premier, la roue enregistre *complètement* le chemin parcouru par le point de contact de la roue. Cette remarque s'applique encore au cas où la tige AS se transporte parallèlement à elle-même dans une direction perpendiculaire à AS et, généralement on peut dire que la roue enregistre complètement le chemin parcouru sur le plan par son point de contact, lorsque la roue se déplace dans une direction normale à la tige.

Telle est l'idée bien simple sur laquelle repose la théorie du planimètre polaire; celle des autres planimètres prend pour base des principes analogues et l'on passe assez facilement de la théorie connue d'un planimètre à celle d'un autre planimètre.

3. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DU PLANIMÈTRE D'AMSLER. — Soit f la courbe que nous avons à considérer; imaginons deux positions infiniment voisines S, S' du style sur f ; soient PARS, P'ARS' les deux positions correspondantes de l'instrument. Par le point A', menons A'M égal et parallèle à AS; on observera: 1.^o que AS.CM est un pa-

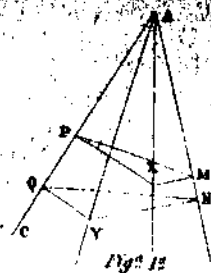


Fig. 12

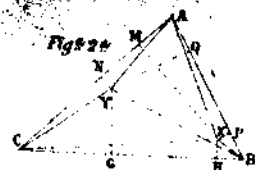


Fig. 24

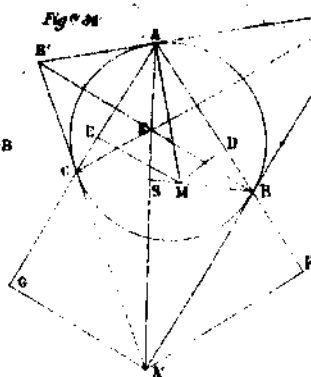


Fig. 34

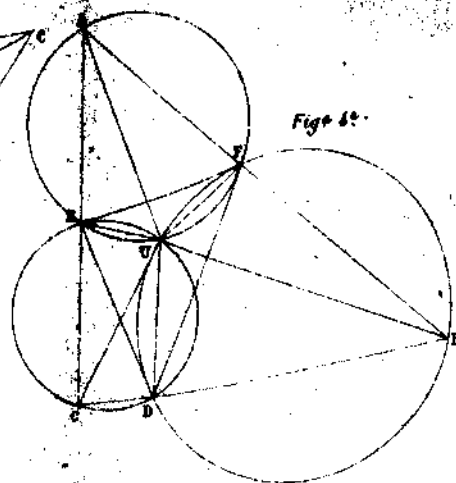


Fig. 44

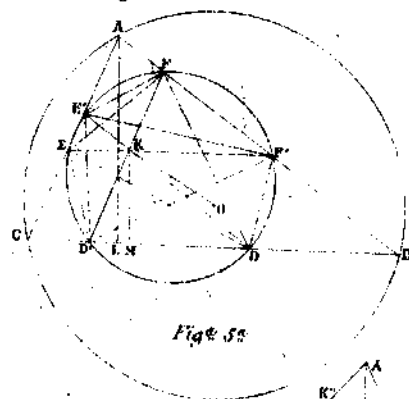


Fig. 54

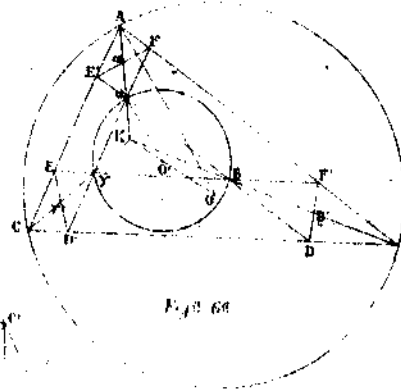


Fig. 64

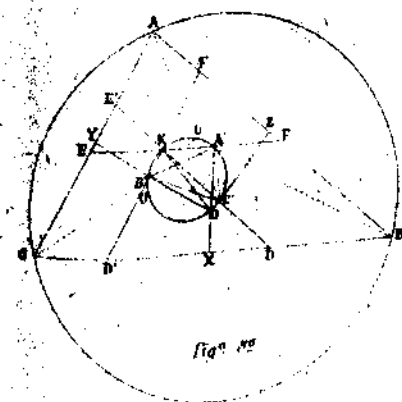


Fig. 74

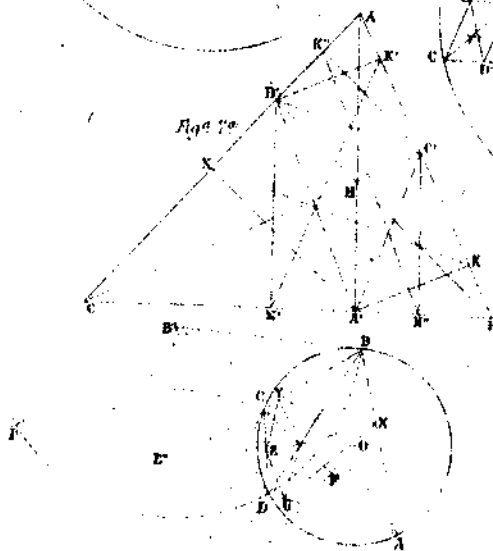


Fig. 84

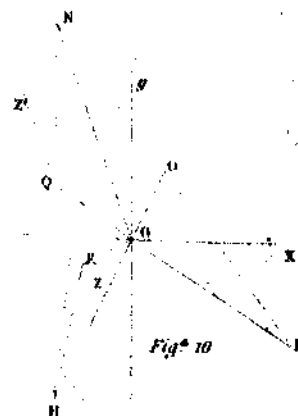


Fig. 94

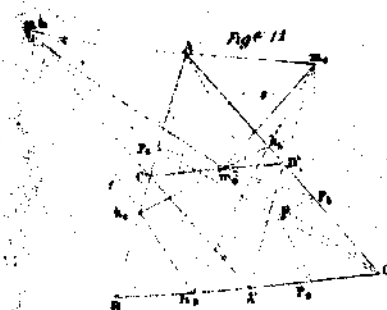


Fig. 104

Fig. 94

rallélogramme; 2º que $A'M = A'S'$. Prenons $AN = AR = A'R'$ et ligurons les axes NR' et MS' ayant pour centre commun le point A' .

L'aire comprise entre l'arc de cercle AA' , l'arc SS' de la courbe f et les deux droites AS , $A'S'$, ne diffère que par un infiniment petit du deuxième ordre de l'aire constituée par le parallélogramme $AA'MS$ et par le secteur circulaire $MA'S'$.

Du point N , abaissons sur AS la perpendiculaire NH et posons

$$AS = r, AR = \rho, \angle MA'S' = \varphi.$$

Nous avons

$$(1) \text{ aire } AA'SS' = r \cdot NH + \frac{1}{2} r^2 \varphi.$$

Cherchons maintenant quel est le chemin enregistré par la roulette.

Celle-ci s'est transportée de R en R' pendant le petit mouvement que nous étudions; nous pouvons considérer ce mouvement comme étant la résultante de trois mouvements déplaçant la roulette successivement suivant RH , HN et l'arc NR' .

RH est un mouvement de glissement, il donne un résultat nul;

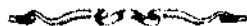
HN et l'arc NR' donnent, au contraire, des mouvements de roulement de plein effet.

Ainsi, le chemin θ , enregistré par la roulette, est égal à NH + arc NR' ; écrivons donc

$$(2) \quad \theta = NH + r \cdot \varphi.$$

Les formules (1) et (2) donnent toute la théorie du planimètre polaire, comme nous allons le montrer.

(Conclura)



LA GEOMETRÍA ELEMENTAL RECIENTE ⁽¹⁾

Entre las varias direcciones que han tomado los estudios geométricos en la época actual, ofrece extraordinario interés la serie de resultados obtenidos, principalmente por los géometras Artzt, Brocard, Casey, Fuhrmann, Kiehl, Lemoine, de Longchamps, McCay, Simons, Tarry, Tucker, Vigarié, etc.; y tales resultados constituyen

(1) *Geométrie élémentaire récente*, par M. John Casey, trad. par Fr. Faisse, 79-págs. Paris, Gauthier-Villars, 1890.

actualmente un conjunto de gran importancia, cuya exposición sistemática, formando cuerpo de doctrina, se ha realizado por el geómetra inglés Casey, desgraciadamente perdido para la ciencia á principios de este año.

La Geometría elemental reciente, publicada por el profesor Casey, es el primer ensayo que reúne las interesantes conclusiones que se han obtenido por efecto del insistente esfuerzo individual llevado á feliz término por cada uno de los geómetras arriba citados, y tanto el periódico *Mathesis*, que dirige el sabio profesor M. P. Mansion, de la Universidad de Gante, como el *Journal de mathématiques élémentaires* de M. Lelonghamps, han sido los principales palenques donde se han ejercitado los esfuerzos tan variados como eficaces de cuantos se han consagrado á fundar esta especial dirección de la ciencia geométrica.

Con objeto de facilitar, tanto el conocimiento de esta teoría geométrica como la lectura de trabajos referentes á la misma, vamos á dar una somera indicación de los puntos capitales desarrollados en la obra del señor Casey, que pueden ofrecer alguna dificultad por razón del tecnicismo empleado necesariamente en una doctrina completamente nueva, y que promete desarrollos considerables sobre los ya obtenidos.

Dos rectas AX, AY (lám. III, fig. 1.ª) son *conjugadas isogonales* con relación á un ángulo, cuando forman ángulos iguales con la bisectriz.

La multiplicación de las igualdades

$$XM : AX = YQ : AY, \quad AX : XP = AY : YN$$

conduce á establecer que los rectángulos XM.YN, XP.YQ son iguales.

Además, de dichas igualdades se deduce que

$$AM : AX = AQ : AY, \quad AX : AP = AY : AN,$$

y $AM : AP = AQ : AN$, ó en fin, $AM \cdot AN = AP \cdot AQ$, es decir, que los puntos M, N, P, Q son *concíclicos*, ó se hallan en una misma circunferencia.

Por ser los ángulos en P y en M rectos, el cuadrilátero AMXP es inscriptible, y el ángulo XPM igual al XAM, además, el ángulo MAX es igual al ángulo YAQ; luego MPX = YAQ, por consiguiente, siendo PX perpendicular á AC, PM lo será á AY, de igual modo que NQ á AX.

Las rectas conjugadas isogonales de tres rectas concurrentes AX, BX, CX, con relación á los tres ángulos de un triángulo ABC (lám. III, figu-

ra 2.^a), son concurrentes, pues si se trazan las conjugadas isogonales AY y BY de AX y BX, y se une Y con C, se tiene

$$YN \cdot XM = YQ \cdot XP, \quad XII \cdot YG = XP \cdot YQ,$$

y por consiguiente

$$YN \cdot XM = XII \cdot YG;$$

luego CX y CY son conjugadas isogonales, con respecto al ángulo C. Los puntos X e Y se llaman *conjugados isogonales* con relación al triángulo ABC, y están caracterizados por la propiedad arriba demostrada de ser iguales los productos de sus distancias á los lados de aquél.

Dos rectas AA', AA" (lám. II, fig. 3.^a) son *conjugadas isotómicas* con relación al lado BC de un triángulo ABC, cuando los segmentos BA' y CA' interceptados por aquéllas en la base BC son iguales. Y si dos puntos O y O' son tales, que las rectas AO, AO' son conjugadas isotómicas respecto al lado BC, y BO, BO' lo son respecto al lado AC, también CO, CO" serán conjugadas isotómicas respecto al lado AB.

La demostración que expusimos en la página 61 de este periódico al tratar la teoría de los *puntos* y de los *triángulos recíprocos* del profesor Longchamps, conducirá á establecer la última proposición enunciada (2).

Dos puntos O y O' serán isotómicos con respecto á un triángulo ABC, cuando lo sean los pares de rectas AO, AO", BO, BO', CO, CO", respecto á los lados BC, AC, AB.

Si A'B' es antiparalela á AB en el ángulo ACB, los puntos A, B, A', B' son concíclicos; y los lados del triángulo A'B'C' formado uniendo los pies de las alturas del triángulo ABC (lám. III, fig. 7.^a), son respectivamente antiparalelos con los lados de éste, pues en la circunferencia cuyo diámetro es BC y que pasa por B' y C', el ángulo BC'B' es suplemento del ACB.

La conjugada isogonal AS (lám. III, fig. 3.^a) de una mediana AM de un triángulo se llama *simediana*; y como las tres medianas de un triángulo son concurrentes, también lo serán las tres simedianas, en virtud de lo arriba demostrado.

El punto K, de gran importancia en la geometría del triángulo, se llama *punto simediano*, ó más generalmente, *punto de Lemoine* del triángulo.

(2) M. de Longchamps llama *recíprocos* á los puntos O y O' (*Essai de la Géométrie de la règle*, pág. 15), reservando la denominación de isotómicos á los pares de puntos como A' y A", etc.

Las perpendiculares trazadas desde el punto K á los tres lados del triángulo son proporcionales á estos lados, pues si x, y, z son las perpendiculares trazadas desde K á los lados del triángulo, por ser AM y AS conjugadas isogonales, se tiene que $MD:z=ME:y$; pero los triángulos AMB y AMC son equivalentes; luego

$$MD \cdot AB = ME \cdot AC; \text{ luego } y:z = AC:AB.$$

Corolario. Representando a, b, c los lados del triángulo y S su área, resulta que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Las simedianas pasan por los polos de los lados del triángulo ABC con respecto al círculo circunscrito, pues siendo A' el polo de BC , si se trazan las perpendiculares $A'F$ $A'G$ á AB y á AC , se tiene

$A'F:A'G = \text{sen } A'BF:\text{sen } A'CG = \text{sen } ACB:\text{sen } ABC = AB:AC$, puesto que $A'B=A'C$, y además

$\text{ángulo } ABC = \text{ángulo } ACB$, $\text{ángulo } A'CB = \text{ángulo } ABC$.

Hallándose $A'F$ y $A'G$ en la misma relación que las perpendiculares trazadas desde K á AB y AC , los puntos A, A', K se hallan en línea recta.

Uno de los elementos importantes en esta Geometría es el *ángulo de Brocard* del triángulo ABC definido por la expresión

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \text{ tang } \omega$$

que satisface á la condición

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C,$$

que resulta fácilmente de dicha expresión y de la relación arriba obtenida entre las perpendiculares trazadas por el punto K y los lados del triángulo.

Otros elementos importantes que deben considerarse son los *puntos de Brocard* del triángulo ABC (designados por las letras Ω y Ω').

Para darlos á conocer son precisas las proposiciones enunciadas en la obra de que nos ocupamos, relativas á las figuras directamente semejantes.

De todo ello sólo diremos que:

Dados dos sistemas homotéticos $ABC, \dots, A'B'C', \dots$ si uno de ellos gira un ángulo α alrededor del centro de homotecia, ocupando una nueva posición $A''B''C'', \dots$, cada dos rectas homólogas $AB, A''B''$

formarán el ángulo constante α , además los triángulos OAA' , ORB' ,... serán semejantes, y recíprocamente, si sobre las rectas trazadas por el punto O se constituyen triángulos semejantes OAA' , ORB' , $OC'C'$,....., el polígono formado por los vértices $A'B'C'$,... es semejante al polígono primitivo ABC ... y el punto O , que considerado como perteneciente á la primera figura es su homólogo en la segunda, se llama *punto doble* de las dos figuras, ó su *centro de semejanza*.

Además, las distancias del punto doble á dos puntos homólogos se hallan en una razón dada, y las perpendiculares trazadas desde el mismo á dos rectas homólogas se hallan en una razón constante.

En fin: el centro de semejanza de un triángulo dado ABC (lám. III, fig. 4.ª) y de un triángulo inscrito DEF semejante es uno ú otro de dos puntos fijos U y U' , que son los *puntos Brocard* del triángulo ABC .

Suponiendo el triángulo DEF inscrito, de manera que los ángulos D , F , E , sean respectivamente iguales á B , A , C , el punto U es el punto común á las circunferencias circunscritas á los triángulos BDF , AFE , CED ; y si el triángulo DEF es tal que el vértice F correspondiente al A esté en el lado AC , resultará de igual manera el otro *punto de Brocard* U' .

Puesto que U es el punto doble de los triángulos ABC , DEF , los triángulos UBD , UFA son equiángulos, y por consiguiente el ángulo UBD , UAF son equiángulos, y por consiguiente el ángulo UBD es igual al ángulo UAF ; luego el círculo AUB es tangente á BC en B .

De igual manera, los círculos circunscritos á los triángulos BUC , CUA son tangentes á CA en C y á BA en A .

Además, los tres ángulos UAB , UBC , UCA son iguales entre sí é iguales al *ángulo Brocard del triángulo* ⁽³⁾, pues siendo concurrentes las rectas, se tiene, según la trigonometría,

$$\operatorname{sen}^3 \omega = \operatorname{sen} (A - \omega) \operatorname{sen} (B - \omega) \operatorname{sen} (C - \omega),$$

de la que resulta

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C,$$

por consiguiente ω es el ángulo de Brocard del triángulo.

Además, de los puntos y el ángulo de Brocard, tienen gran im-

(3) En el texto se hace ver que

$$\operatorname{ang.}^\circ B\Omega C = \operatorname{ang.}^\circ B\Omega D + D\Omega C = BFD + DEC = \dots = BAC + FDE,$$

y en resumen que los tres ángulos $B\Omega C$, $C\Omega A$, $A\Omega B$ son respectivamente iguales á las sumas

$$A + D, B + E, C + F \text{ ó } A + B = 180^\circ - C, B + C = 180^\circ - A, C + A = 180^\circ - B.$$

portancia en la Geometría reciente los círculos de Lemoine, de Tucker y de Taylor.

Si por el punto de Lemoine K del triángulo ABC (lám. III, fig. 5.^a) se trazan las paralelas DE' , EF' , FD' á los lados de éste, se formarán tres paralelógramos $AE'FK$, $BF'KD$, $CD'KE$, en los que EF' , FD' , $D'E$ son las diagonales, así como KA , KB , KC , resultando que EF' es antiparalela de BC , FD' de AC , $D'E$ de AB , y además $FE' = ED' = DF'$. Si, en fin, el punto O es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC , se deduce que el punto medio de KO equidista de los puntos F , E' , E , D' , D , F' .

El círculo que pasa por estos seis puntos es el *círculo de Lemoine*, y el exágono del cual son los vértices el *exágono de Lemoine*.

Si un triángulo $\alpha\beta\gamma$ es el homotético del ABC (lám. III, fig. 6.^a) siendo el centro de homotecia el punto de Lemoine K del triángulo ABC , y si D y E' , E y F' , F y D' son las intersecciones de los lados de ABC con los lados correspondientes de $\alpha\beta\gamma$, prolongados si es preciso, *estos seis puntos son concíclicos*, pues siendo K el punto de Lemoine, las rectas AK , BK , CK son las medianas de FE' , DF' , ED' , y por consiguiente FE' , DF' , ED' son antiparalelas á los lados del triángulo ABC , y los seis puntos se hallarán en el mismo círculo.

Si el triángulo $\alpha\beta\gamma$ varía, el lugar del centro del círculo circunscrito al exágono es la recta OK .

M. Neuberg ha llamado *círculos de Tucker* á los círculos circunscritos al exágono, cuando varía el triángulo $\alpha\beta\gamma$.

Cuando el triángulo $\alpha\beta\gamma$ se reduce al punto K , el círculo de Tucker tiene su centro en el punto medio de OK y se reduce al círculo de Lemoine.

Si A' , B' , C' son los vértices del triángulo *órtico* de ABC ⁽⁴⁾ y K , N ; K' , N' ; K'' , N'' son sus proyecciones sobre los lados, *estas proyecciones son concíclicas*, pues siendo H el ortocentro⁽⁵⁾, las figuras $AKA'N$, $AC'HB'$ son homotéticas, siendo A el centro de homotecia; luego KN es paralela á $C'B'$ y $K'K''$ antiparalela á $C'B'$, porque K' y K'' pasan por los pies de las alturas $B'K'$, $C'K''$ del triángulo $AB'C'$; luego los puntos K , N , K' , K'' son concíclicos y lo mismo K , N , K' , N' . Este círculo estudiado por Mr. Taylor se llama *círculo de Taylor*.

En fin, si O es el centro del círculo circunscrito (lám. III, fig. 8.^a) y K el centro de las simedianas del triángulo ABC , el círculo descrito sobre OK como diámetro se llama el *círculo de Brocard*.

Si desde O se bajan las tres perpendiculares á los lados del trián-

(4) El triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas del ABC .

(5) Punto de intersección de las tres alturas.

gulo ABC, éstas cortarán el círculo de Brocard en otros tres puntos A' B' C' que determinan un triángulo llamado *el primer triángulo de Brocard*, el cual es *inversamente semejante al triángulo ABC*, puesto que siendo OA' perpendicular á BC y OB' á AC, el ángulo A'OB', es igual al ACB, además A'OB' es igual á A'C'B'; luego A'C'B' es igual á ACB.

De igual manera se deduce la igualdad de los otros ángulos que se hallan inversamente orientados.

Si el círculo de Brocard del triángulo ABC corta á las simedianas en tres puntos A'', B'', C'', el triángulo A''B''C'' se llama *el segundo triángulo de Brocard*.

No nos detendremos en indicar las numerosas propiedades demostradas en la *Geométrie élémentaire récente*, publicada por el geómetra Casey, sólo citaremos para terminar, las teorías de los *polígonos armónicos*; y si los lados del polígono se designan por $a, b, c, \dots$ y las perpendiculares trazadas desde K sobre éstos por $x, y, z, \dots$ el ángulo ω determinado por una de las ecuaciones

$$x = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \omega, \quad y = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \omega,$$

se llama *ángulo Brocard del polígono*.

En cuanto á las figuras asociadas, si se une un punto cualquiera X de una circunferencia Z á n puntos fijos $I_1, I_2, \dots, I_n$ de la misma circunferencia, y en el mismo sentido á partir de x , se toman sobre estas rectas los segmentos $I_1 A_1, I_2 A_2, I_3 A_3, \dots, I_n A_n$ proporcionales á los números dados $d_1, d_2, \dots, d_n$, entonces un sistema de figuras directamente semejantes construídas sobre $I_1 A_1, I_2 A_2, \dots, I_n A_n$ se llama *sistema asociado*.

Creemos con estas definiciones haber dado una idea de este género de investigaciones geométricas, á cuyo desarrollo han contribuído geómetras de diversas naciones, y que especialmente han sido asunto de varios artículos publicados en los periódicos *Mathesis* y *Journal de mathématiques élémentaires*, donde el aficionado á esta clase de investigaciones puede encontrar detalles que no pueden tener cabida en esta somera relación.

Pero tanto interés ha despertado este género de cuestiones tratadas en los periódicos arriba citados como en *Quarterly Journal*, *Appendix to the Proceedings of the London Mathematical Society* y otros, que no dejaremos de insistir en algunas ocasiones sobre puntos concernientes á esta Geometría del triángulo, y terminaremos prometiendo poner al corriente á nuestros lectores de los resultados debidos al

profesor de la Universidad de Lieja, M. Neuberg, y que se hallan expuestos en sus diversos trabajos *Sur le point de Steiner*, *Sur le quadrilatère harmonique*, *Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert* y su *Mémoire sur le tétracèdre* y otros varios.

Z. G. DE GALDEANO



LEÇONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES

PAR G. DARBOUX

Acaba de aparecer el segundo fascículo de la tercera parte, que tiene por objeto: Las líneas geodésicas y curvatura geodésica, los parámetros diferenciales y la deformación de las superficies.

Al final del primer fascículo, el libro VII está destinado á desenvolver principalmente las investigaciones debidas al profesor de la Universidad de Pavía Sr. Beltrami, que principió á exponer en el *Giornale di Matematiche* (1865) en *Annali di Matematica* y en *Mathematische Annalen*, sobre las aplicaciones del Análisis á la Geometría.

El capítulo II tiene por objeto reconocer si dos superficies son aplicables la una á la otra, llegando á la conclusión de que sólo hay dos clases de superficies cuya aplicacion puede efectuarse de infinitud de maneras: las superficies de curvatura constante y las aplicables sobre las superficies de revolución, examinando los casos de las superficies alabeadas y regladas, y dedicándose después á la determinación de las superficies aplicables á una superficie dada y al estudio del problema de la deformación de las superficies, examinando multitud de casos del mismo, llegando entre otras conclusiones á que *si dos superficies son aplicables entre sí de tal manera que todas las líneas asintóticas de la una correspondan á las líneas asintóticas de la otra, las dos superficies son iguales ó simétricas*.

Con el estudio de la deformación de las superficies, alabeadas y los resultados debidos al Sr. Beltrami⁽¹⁾ comienza el segundo fascículo recientemente publicado de la obra de M. Darboux, tratándose de la deformación de una superficie reglada, de manera que una de sus curvas se convierta en plana ó una de sus líneas se reduzca á recta y de la de una superficie alabeada, de manera que una línea dada se convierta en asintótica.

(1) *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria* (*Giornale di matematiche*, vol. II, 1864).

El capítulo VII está destinado á los notables teoremas de Weingarten referentes á las superficies cuyos radios de curvatura se hallan ligados por una ecuación dada *á priori*, que se relacionan con la teoría de la deformación de las superficies, resultados que conducen al sabio geómetra alemán á una nueva clase de superficies definidas por una relación entre sus radios de curvatura, las superficies W, caracterizadas por ser los radios de curvatura función el uno del otro, y en las cuales las dos ramas de la evoluta son aplicables sobre una superficie de revolución cuyo elemento lineal depende sólomente de la relación entre los radios de curvatura.

Después de desarrollar en el capítulo VIII los resultados debidos á los matemáticos Sres. Beltrami, Laguerre y Ribaucour sobre las propiedades generales de la superficie de los centros de curvatura, expone las investigaciones de los Sres. Sophus Lie y Bonnet referentes á determinación de las superficies, para las que ya la curvatura, media, ya la total sean constantes, problemas que según una observación ingeniosa del último ofrecen en uno ú otro caso la misma dificultad; y no dejan de citarse y desenvolverse los importantes resultados debidos al Sr. Bianchi, ya en sus *Lezioni di Geometria differenziale fatte nella università di Pisa*, donde se encuentran también expuestos los resultados debidos á los Sres. Weingarten, Ribaucour y Beltrami, ya en sus diversas Memorias *Sui sistemi de Weingarten negli spazi di curvatura costante*, 1887, (donde se extienden los sistemas de Weingarten al espacio de Riemann, de curvatura constante negativa), *sulle superficie fuchsiane*, *sulle superficie le cui linee sono curve a torsione costante*, todas ellas concernientes á la importante rama de la ciencia geométrica, objeto de la obra de M. Darboux.

Para poder abarcar este nuevo punto de vista desde el que considera el Sr. Bianchi los resultados de M. Weingarten, se hace preciso partir de las consideraciones expuestas por M. Darboux en la primera parte de sus *Leçons sur la théorie générale des surfaces* ⁽¹⁾, donde se estudia la superficie engendrada por la revolución de una catenaria alrededor de su base, llamada *aliscide* ó *catenoide* que es la única superficie mínima de revolución, la *tractrix* ó *curva de las tangentes iguales*, que engendra la superficie de revolución *pseudoesférica*.

El Sr. Bianchi examina las tres formas distintas que se obtienen para el elemento lineal de una superficie de revolución con curvatura constante negativa, llega á lo que denomina *superficie complementaria* de la superficie Σ de curvatura constante negativa y una trac-

(1) «Recherche d'Analyse», etc. Pág. 77.

triz en la que se han aumentado ó disminuído en una razón constante las ordenadas perpendiculares á la base que llama *tractrices prolongadas ó acortadas*, y en fin, á su método de transformación de las superficies de curvatura constante, objeto del capítulo XII y último contenido en el último fascículo de la obra de M. Darboux, al que este eminente geómetra cree necesario anteponer el XI destinado á una exposición de la *superficie pseudoesférica*, asunto de sumo interés, por lo cual creemos muy oportuno terminar esta reseña del trabajo que nos ocupa, apuntando algunos de los conceptos en dicho capítulo contenidos.

Elije M. Darboux entre todas las superficies de curvatura constante $-\frac{1}{a^2}$ aquélla cuyo elemento lineal está definido por la fórmula

$$ds^2 = a^2 (du^2 + e^{2u} dv^2), \quad (1)$$

engendrada por la revolución de la tractriz

$$r = a \operatorname{sen} x, \quad z = a (\log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \cos x) \quad (2)$$

y haciendo $v = x$, $e^{-u} = y$, el elemento lineal se reduce á

$$ds^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

de manera que, si se consideran x é y como las coordenadas rectangulares de un punto de un plano, se obtendrá una carta geográfica en la cual toda la parte real de la superficie estará representada en la parte superior del plano con semejanza de los elementos infinitamente pequeños.

A todo punto real M de la superficie corresponde un punto m del plano, que es real y se halla situado sobre el eje de las x .

Tratando de obtener todas las transformaciones que no alteran el elemento lineal, la introducción de las coordenadas simétricas

$$\alpha = x + iy, \quad \beta = x - iy,$$

permite expresar el elemento lineal bajo la forma

$$ds^2 = -4a^2 \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha - \beta)^2}.$$

y definir, no sólo una transformación plana con conservación de los ángulos, sino que, si se consideran α y β como coordenadas simétricas de un punto de la *pseudo esfera*, la transformación conserva los arcos, y por consiguiente los ángulos y las áreas, llegándose á una defor-

mación continua por la que la superficie no deja de coincidir consigo misma, quedando sometida toda figura trazada en dicha superficie á una deformación análoga al movimiento de una figura esférica en la esfera que la contiene.

Después de establecer que *las diferentes geodésicas de la superficie admiten por imágenes círculos cuyos centros se hallan en el eje de las x* , pasa M. Darboux á dar la clasificación de las transformaciones que conservan el elemento lineal, investigando si existen puntos invariantes por la transformación, examina los casos de la *substitución elíptica* segun Herr Klein, por la cual un solo punto real de la superficie queda inmóvil, la *hiperbólica* por la que permanen invariantes dos puntos reales en el infinito, y la transformación *parabólica* que deja invariable uno solo tambien en el infinito, de manera que *los tres tipos de transformación considerados, estan representados por rotaciones de tres superficies distintas de revolución con curvatura constante negativa*.

Antes de terminar M. Darboux el interesante capítulo preparatorio para los métodos de transformación de los Sres. Bianchi y Lie, aplica las consideraciones expuestas á los problemas fundamentales de la geometría, concernientes á la perpendicularidad y al paralelismo. Así, observa que dos geodésias perpendiculares á una tercera se encuentran siempre, si la curvatura es positiva, y no se encuentran si es nula ó negativa. De manera, que para las superficies de curvatura negativa como para el plano, *no se puede trazar por un punto mas que una geodésica perpendicular á una geodésica dada*. Además, segun lo expuesto anteriormente *se puede trazar siempre una*.

En cuanto al paralelismo, en el caso de la esfera es imposible el trazado de una geodésica paralela á otra (g); en el plano, cuando admitimos el postulado de Euclides, existe una sola que pase por un punto M, que es la paralela trazada por este punto. Y en cuanto á las superficies de curvatura negativa, aplicando la transformación empleada y admitiendo, como puede hacerse sin perjudicar á la generalidad, que (g) se halla representada por el eje de las y , entonces *habrá dos geodésicas trazadas por M que encuentran á (g) en el infinito*. La una representada por la paralela MP al eje de las y , la otra representada por el círculo OMQ tangente á éste en el origen.

En resumen: *Puede considerarse que una geodésica tiene 0, 1 ó 2 puntos en el infinito, segun que pertenezca á superficies de curvatura positiva, nula ó negativa*.

Suponiendo, en fin, trazada la circunferencia de centro O y que pasa por M, que representa la geodésica trazada por el punto M per-

pendicularmente á (g) y la igualdad de los ángulos SMO, SMP, llega la definición del *ángulo de paralelismo* y á su expresión

$$\operatorname{tang} \Pi(p) = \frac{2 e^{\frac{x}{2p}}}{1 - e^{\frac{x}{p}}},$$

haciendo referencia, para terminar estas consideraciones relativas á las geometrías de Gauss, Lobatschewsky y Bolyai, á la importante Memoria del Sr. Beltrami, *saggio di interpretazione della Geometria non euclidea*.⁽¹⁾

Z. G. DE GALDEANO.

ESTUDIO ANALÍTICO

DE UN LUGAR GEOMÉTRICO DE CUARTO ORDEN

Por

DON JOSÉ RUIZ-CASTIZO ARIZA

Ha dicho bien el autor del detenido y sencillo estudio que motiva esta reseña, distinguido Doctor en Ciencias y Ayudante de la Escuela G. P de I. y A. de Madrid, en publicar este interesante trabajo que puede tomarse como modelo para otros muchos casos análogos, porque de un modo fácil y completo discute la forma y particularidades que ofrece el lugar geométrico engendrado por el punto medio de una recta de longitud constante p que se apoya por uno de sus extremos sobre una recta y por el otro sobre una circunferencia de radio r , de tal modo que la longitud p sea igual á la mayor distancia entre la circunferencia y la recta fija, medida sobre la normal á ésta que pasa por el centro de la circunferencia.

Empieza el estudio formando la ecuación del lugar geométrico, cuando el punto generador es cualquiera de los de la recta móvil, y fijándose después en el supuesto de que dicho punto divida á la recta en dos partes iguales, obtiene la ecuación

$$y = \pm 2 \sqrt{rx - x^2} + \sqrt{px - x^2}$$

(1) Giornale di Matematiche vol VI 1868. Annales de l'École Normal. *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante*.

cuya representación geométrica está dada por la figura adjunta, en la cual se ha tomado para el eje OX la perpendicular á la recta fija trazada por el centro de la circunferencia y para el OY la perpendicular levantada á OX en el punto medio de la mayor distancia entre la recta fija y la circunferencia medida sobre el eje OX.

Hace notar el señor Castizo que en estas condiciones la curva pasa por el origen y está comprendida entre el eje OY y su paralela trazada del lado positivo de xx' á una distancia $x=p$ ó $x=r$, según que $p < r$ ó $p > r$.

Después observa que siendo los valores de y finitos para todos los puntos de x , la curva está limitada en el sentido de las yy' positivas y negativas.

Componiéndose el segundo miembro de la ecuación de dos términos precedidos del doble signo +, habrá generalmente cuatro puntos del lugar geométrico sobre una misma ordenada, excepto para $x=0$, que da $y=0$.

También existe otro punto sobre el eje OX, cuya abscisa *satisface á la ecuación*.

$$2\sqrt{rx_0 - x_0^2} = \sqrt{px_0 - x_0^2}$$

que da

$$x = \frac{1}{2}(4r - p)$$

Calculando después el coeficiente angular de la tangente

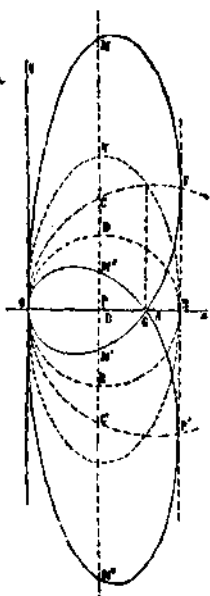
$$\frac{dy}{dx} = + \frac{r-2x}{\sqrt{rx-x^2}} + \frac{p-2x}{2\sqrt{px-x^2}},$$

se ve que tiene cuatro valores correspondientes á los cuatro puntos de la curva que se encuentran sobre una misma ordenada, y de cuya discusión resulta que en el origen la curva es tangente al eje OY, y que el punto situado sobre el eje OX á la distancia

$$x = \frac{1}{2}(4r - p)$$

es doble.

Determina después los puntos de ordenada y abscisa máxima y mínima, continuando el estudio del lugar geométrico que presenta



particularidades notables como es la de que *el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas al eje OY está formado por el eje de simetría OX, una circunferencia y una elipse, tangentes estas últimas al eje OY en el origen de coordenadas.*

Por último, discute el autor las diferentes formas que puede afectar el lugar geométrico, según que $p > r$; $p = 2r$; $p < 2r$ dividiendo este último en tres casos, según que p esté comprendido entre r y $2r$, sea $p = r$ ó $p < r$, terminando con el cálculo del área, en todo lo cual, aunque rápidamente expuesto, da al estudio una extensión de 92 páginas en cuarto.

II. B



SOFÍA DE KOWALEVSKI

Sofía de Kowalevski, cuya muerte acaecida en 10 de Febrero último, ha privado á la ciencia matemática de una colaboradora insignne y á su sexo de una de sus más gloriosas representantes, ofrece un raro ejemplar de talento femenino que con legítimo derecho figurará en la historia del desenvolvimiento de la ciencia humana, no tanto por el número de sus obras, que fatalmente ha limitado lo prematuro de su muerte, á la temprana edad de 37 años, como por la suma del esfuerzo intelectual que supone cuanto realizó durante su corta existencia.

Descendiente ilustre del rey de Hungría Matías Corvin, é hija del general de artillería Basilio Corvin-Krukowski, aunque dotada de extraordinaria capacidad literaria desde su infancia, reveló su vocación por las ciencias matemáticas á la edad de catorce años, por más que su profesor Malevitsch vislumbrara para ella la gloria literaria.

Estudió en Berlín las matemáticas bajo la dirección del célebre matemático Sr. Weierstrass, y á los veintidós años obtenía el grado de doctor en Filosofía y Bellas Artes en la Universidad de Göttinga, aceptando más tarde la cátedra de Matemáticas superiores de la Universidad de Stokolmo, creada para ella, merced al eficaz apoyo del doctor Mittag-Leffler, y que desempeñó desde 1884.

Uno de los hechos más gloriosos que pueden citarse en la vida científica de Sofía Kowalevski fué el que realizó al obtener el premio Bordin en 1888 de la Academia de Ciencias de París por su "*Mémoi-*

re sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps", siendo ponente M. Darboux y vocales los señores Maurice Lévy, Phillips, Resal y Sarrau, que por unanimidad lo adjudicaron á la Memoria presentada bajo el lema: *Dis ce que tu sais, fais ce que dois, adieu que pourra*, é impresa después en la colección de las *Mémoires de Savants étrangers*.⁽¹⁾

En fin, el ilustre geómetra Herr L. Kronecker, de la universidad de Berlín, diez días después de la muerte de Sofía Kowalevski se expresaba en estos términos:

"Sophia de Kowalevski reunía á una perseverancia infatigable un talento excepcional para las especulaciones matemáticas generales y los conocimientos técnicos necesarios para las investigaciones especiales: había sabido siempre ser muger y conservar no obstante una actividad especial intensa, un vivo interés por los objetos del espíritu, lo que la hizo conquistarse y cautivar la general simpatía, aun de los que se hallaban fuera de su círculo de acción.

La historia de las matemáticas la citará ciertamente como uno de los fenómenos más maravillosos y de una de las más excepcionales investigadoras. Y á la par que sus algunas obras, poco numerosas, pero muy importantes, que nos deja, harán durar su memoria en el mundo matemático, el recuerdo de su notable y simpática personalidad vivirá siempre en los corazones de todos los que tuvieron la dicha de conocerla."⁽²⁾

En el artículo necrológico publicado por el Sr. E. de Kerbedz en los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, del cual hemos extractado las noticias arriba expuestas, se citan además las ilustres antecesoras de Sofía Kowalevski, Emilia Le Tonnelier de Breteuil, marquesa del Chatelet, á quien entre otras obras se debe un *Analyse de la philosophie de Leibnitz*; María Gaetana Agnesi, que publicó en latín sus *Institutiones analytiques*, impresas por Bossut con el título: *Traites élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral* (1775), y en fin, María Sophie Germain, á quien la Academia de Ciencias de París adjudicó un premio por una de las cuestiones de física matemática más nuevas y más arduas: *la teoría de las superficies elásticas*.

También acompaña la lista de las obras matemáticas y literarias de Sofía Kowalevski, de las que citaremos las siguientes:

(1) *Comptes Rendus*, t. CVII, p. 1042.

(2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. CVIII Heft (18 März 1891).

Zur Theorie der partiellen Differential gleichungen (1874). — *Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3^{ten} Ranges auf elliptische Integrale* (1884). — *Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé* (1884). — *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe* (1885).

Z. G. DE GALDEANO.



IMPORTANCIA DE LAS FORMAS CONGÉNERES EN LA MATEMÁTICA

Por

D. LAURO CLARIANA Y RICART

Fenómeno raro es el que ofrece el estudio de la Matemática en nuestros tiempos modernos. Pudiera decirse que la cantidad pugna con la cantidad; la aritmética con el número; el álgebra con los algoritmos; la geometría con el espacio. La inteligencia humana, cual mar embravecida, no cesa en su oleaje continuado, sustituyendo al suave rielar de otros tiempos, la gigantesca ola como anuncio de deshecho temporal. El movimiento vertiginoso que se opera entre los elementos de la inteligencia no supone peligro alguno para el hombre; muy al contrario: el grande oleaje deja siempre algo en la orilla que no debe despreciarse. El vaivén entre lo general y particular; entre el análisis y la síntesis; entre lo que *es* y lo que *no es*; se acrecienta cada día más, cual onda cuya amplitud aumenta rápidamente. Comenzóse el estudio de la Matemática por el simple número real, positivo y entero, y andando siglos llegóse á la cantidad directiva sin valor asignable; en el álgebra los símbolos operativos condensan ya una infinidad de algoritmos particulares; el cálculo integral sintetiza el Universo en una simple fórmula, que tiene por origen el indefinidamente pequeño; en la discontinuidad preténdese hallar las fuentes de la continuidad; y por fin, sintiéndose a herrojado el matemático dentro del espacio de Euclides, supone el hiper-espacio, para que la Geometría pueda satisfacer todas las exigencias del análisis, á pesar de que en dicho hiper-espacio se pierda toda idea de realidad.

Sensible es que, en medio de ese desenvolvimiento tan portentoso bajo direcciones tan varias exista todavía alguno que otro importante punto que no hayan procurado estudiar como debieran los verdaderos genios, al objeto de formar un todo más armónico entre los di-

ferentes elementos de la ciencia matemática; nos atreviéramos á consignar que el estudio de las formas congéneres debiera procurar grandes beneficios á la ciencia, y en particular al cálculo infinitesimal.

(Continuará)



VARIEDADES

Congreso internacional de bibliografía de las ciencias matemáticas.—

En los días 16, 17, 18 y 19 de Julio de 1889 se reunió en París un Congreso internacional de Bibliografía de las ciencias matemáticas, con el fin de discurrir un proyecto de publicación de un repertorio bibliográfico de estas ciencias.

Una comisión presidida por el Sr. Poincaré, miembro del Instituto, tenía anticipadamente preparado el proyecto de clasificación que debe seguirse en el repertorio bibliográfico. Este proyecto se discutió en los días 16, 17 y 18, siendo votadas en el 19 las resoluciones siguientes:

RESOLUCIONES VOTADAS POR EL CONGRESO

El Congreso internacional de Bibliografía de las ciencias matemáticas, reunido en París el 19 de Julio de 1889, toma las resoluciones siguientes:

1.^a Conviene publicar un repertorio bibliográfico de las ciencias matemáticas destinado á evitar á los estudiosos largas penosas investigaciones. Este repertorio deberá contener los títulos de las memorias relativas á las matemáticas puras y aplicadas, publicadas desde 1800 hasta 1889 inclusive, así como los trabajos relativos á la historia de las matemáticas desde 1600 hasta 1889 inclusive. Estos títulos serán clasificados, no por los nombres de los autores, sino por el orden lógico de las materias.

2.^a Se publicarán sucesivamente suplementos á este repertorio; el primero estará consagrado á los trabajos publicados desde 1889 exclusivamente hasta 1899 inclusivamente, y los suplementos siguientes á los períodos de diez años que seguirán. En cada suple-

mento quedarán reparadas las omisiones descubiertas en el repertorio ó en los suplementos precedentes.

3.^a Quedarán excluidas del repertorio las obras clásicas que no contuvieren resultados originales y las destinadas á los alumnos de los diversos Establecimientos de instrucción y á los candidatos á los diversos exámenes. Quedarán igualmente excluidas las memorias publicadas en las colecciones científicas especialmente destinadas á estos candidatos. Pero, como varias colecciones científicas ofrecen un carácter mixto y contienen, juntamente con numerosos ejercicios sólo útiles á los estudiantes, algunos trabajos originales, estos últimos trabajos serán mencionados en el repertorio, después de las selecciones hechas de estas colecciones por la administración y haber emitido dictamen favorable la comisión permanente instituída por la 10.^a resolución.

4.^a Los trabajos relativos á las matemáticas aplicadas no deberán mencionarse en el repertorio, excepto en el caso de interesar á los progresos de las matemáticas puras. Los trabajos relativos á astronomía, ya mencionados en la *Bibliografía* de Houzeau y Lancaster quedarán excluidos del repertorio.

5.^a El Congreso adopta para el repertorio la clasificación propuesta por su comisión de organización con las modificaciones votadas en las sesiones de 17 y 18 de Julio de 1889. Los diversos títulos mencionados quedarán repartidos en cierto número de clases, subdivididas en sub-clases, divisiones, secciones y sub-secciones. Las clases se designarán por una letra mayúscula: podrán dividirse en sub-clases designadas por una letra mayúscula afectada de un exponente. Las clases ó sub-clases se subdividen en secciones designadas por una cifra árabe, y estas secciones designadas por una letra minúscula latina, las que podrían ser divididas en sub-secciones representadas por una minúscula griega. Así la sub-sección α de la sección b, que forma parte de la división 3 de la sub-clase L', se anotará como sigue

L' 3 b α

6.ª Los títulos de los trabajos escritos en idiomas que no sean el alemán, inglés, italiano, español y latín deberán ir acompañados de su traducción francesa.

7.ª Atendiendo á que podrá ocurrir que por una razón, algún sabio entienda se deba adoptar un modo diferente de clasificación, el Congreso desea que este sabio emplee una notación que no pueda ser confundida con la descrita en la quinta resolución, y evite en todo caso el empleo del rectángulo.

8.ª Atendiendo que el trabajo del repertorio ha de exigir muchos años, y para facilitar medios á los investigadores, el Congreso hace votos porque las diversas publicaciones consagradas á las matemáticas publiquen una tabla general de las materias contenidas en sus tomos, conforme con la clasificación arriba adoptada. El Congreso agradecerá mucho á los administradores de estas publicaciones que presten su concurso, para esta clasificación, á la comisión permanente.

9.ª Para facilitar la formación de los suplementos consagrados á los trabajos posteriores á 1889, el Congreso hace votos para que cada autor haga seguir el título de su memoria de la notación definida en la quinta resolución; que si el autor deja de hacerlo, los administradores de las diversas publicaciones periódicas, ó, cuando estos no lo hicieren, los redactores de las publicaciones analíticas que dieren noticia de estos trabajos y quieran encargarse de este requisito.

10.ª Queda instituida una comisión permanente para velar por la ejecución de las precedentes resoluciones, que se halla formada por los miembros franceses, Sres. Poincaré, Désiré André, Humbert, d'Ocagne, Charles Henry; y de los miembros extranjeros, Sres. Catalán, Bierens de Haan, Glaisher, Gomes Teixeira, Holst, Valentin, Emile Weyr, Guccia, Eneström, Gram, Liguine, Stephanos. El centro de la comisión permanente se halla en París, donde deberán residir el presidente y el secretario. Si hubiese vacantes en esta comisión debe completarse eligiendo nuevos miembros; y queda igualmente autorizada para elegir nuevos miembros en número cualquiera. Esta comisión resolverá respecto á las adiciones á la clasificación adoptada, que los progresos de la ciencia pueda hacer necesarias, y respec-

to á las dificultades á que den origen la interpretación de las resoluciones precedentes. En el caso de que, por una razón cualquiera le parezca necesaria una nueva conferencia entre los matemáticos de los diversos países, la comisión organizará un nuevo Congreso internacional, ó en París, ó en otra cualquiera ciudad de Europa.

11.ª El Congreso hace votos para que tanto en Francia, como en el extranjero, los diversos periódicos matemáticos den la mayor publicidad á las anteriores resoluciones y á las futuras decisiones de la comisión permanente.

Acaba de publicarse un resumen de las actas del Congreso, conteniendo las resoluciones precedentes y la clasificación de las cuestiones del dominio de las ciencias matemáticas aprobada por el Congreso.

* * *

JORNAL DE SCIÊNCIAS MATHÉMATICAS E ASTRONÓMICAS publicado por el Dr. F. Gomes Teixeira, tomo IX. (Porto, rua de Costa-Cabral, número 132).

Entre los artículos contenidos en este último tomo del periódico matemático del Sr. Gomes Teixeira citaremos los siguientes:

“Sobre una representación paramétrica de las curvas de primer género”, por Duarte Leite.

“Demostración del Teorema de Cauchy”, por J. B. de Cabedo.

Las “observaciones sobre diversos artículos concernientes á la teoría de las series”, ofrecen un estudio interesante con motivo de ciertas series tratadas por el profesor Lerch, hecho por los Sres. César y Gutzmer acerca de series convergentes, en las cuales el cociente de dos términos consecutivos puede ser tan grande como se quiera, y aun el caso en que el término general, cuyo límite es cero, se halle expresado por una función de n ya creciente, ya decreciente.

El Sr. G. Pirondini, del Instituto técnico de Parma, en un artículo “sobre las líneas esféricas”, trata de la evoluta esférica, deduciendo que *una hélice esférica es siempre una evolvente de un círculo menor y se ocupa además de las curvas esféricas paralelas, de las curvas esféri-*

cas polares, de las líneas planas, concluyendo con la exposición de propiedades relativas á las evolventes geodésicas de las hélices esféricas.

En fin, bastará citar el artículo de M. Lerch "sobre una función continua, cuya derivada es discontinua" y la "nota sobre la integración de las ecuaciones de derivadas parciales de segundo orden" del señor Gomes Teixeira para formarse idea del último tomo publicado por este ilustre propagandista de la ciencia matemática en Portugal.

* * *

MATHESIS.—Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. (Gand, AD. Hoste, éditeur. Paris, Gauthier-Villars, et fils).

Este periódico, que ha llegado al undécimo año de existencia, en el cual se publican lo mismo artículos originales que discusiones relativas á puntos de metodología matemática, y sobre todo que contiene una gran colección y muy variada de problemas, ha sido uno de los que han contribuido en alto grado á establecer y divulgar las teorías de la Geometría reciente, y en los últimos números publicados se contienen entre otros los trabajos siguientes: *Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Standt y Clausen*, par M. Ed Lucas.—*Notes sur la Géométrie euclidienne et sur la Géométrie non euclidienne*, par M. P. Mansion.—*Sur les quadrangles complets*, par M. J. Neuberg.—*Un astronome belge du XVII^e siècle* par M. C. Le Paige.—*Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée*, par M. Servais.

* * *

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.—Los números de los meses de Febrero y Marzo contienen entre otros artículos los relativos á las coordenadas cuádruplas de M. Bézenech y de las coordenadas angulares de M. Lormeau, continuándose además los artículos sobre los progresos de la Geometría del triángulo de M. Vigarié y el *Ensayo de un programa de matemáticas especiales*, de M. Humbert.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. — Entre otros trabajos aparecen en los dos últimos números el *Estudio de los conos que pasan por la intersección de dos cuádricas* de M. Humbert y la continuación del interesante artículo *El trifolium*, por M. Brocard.

* * *

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LOS DETERMINANTES Y SUS APLICACIONES A LA RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y A LA TEORÍA DE LAS FORMAS, por D. Guillermo Fernández de Prado. 1891 — 239 págs. — Precio 5 pesetas.

Este nuevo libro principia por establecer la noción de las inversiones y de las sustituciones circulares, en el capítulo primero, las definiciones de las matrices y de los determinantes son objeto de los capítulos II y III, tratándose en éste de los determinantes menores y de las transformaciones de los determinantes. El desarrollo de un determinante es objeto de un extenso artículo donde abundan los ejemplos y ejercicios útiles para la fácil comprensión del asunto.

Al tratarse de la combinación de los determinantes se demuestra el teorema de Binet y Cauchy con el cuidado que exige su importancia.

Después de exponerse las variedades de determinantes recíprocos, simétricos, hemisimétricos y pseudosimétricos, los capítulos VII y VIII contienen, con gran detalle, la aplicación á la resolución de las ecuaciones aisladas y á los sistemas de ecuaciones, demostrándose el teorema de M. Rouché. Por último, casi la mitad de la obra está destinada á exponer lo más preciso para que el alumno se forme una idea clara de los conceptos más fundamentales de la teoría de las sustituciones lineales y de las formas.

Lo esmerado de la impresión unido á la precisión y brevedad del razonamiento y á los numerosos ejemplos y ejercicios, contribuyen á hacer fácil el estudio de la hoy tan importante teoría, que es el objeto de la obra escrita, con gran conocimiento del asunto y de las exigencias de la enseñanza, por el señor Fernández de Prado.