

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

EXPOSITION DE LA THÉORIE DES INTÉGRATEURS

PAR M. G. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT LOUIS, A PARIS

(CONCLUSION)

4. PREMIER CAS. *L'aire de f est complètement extérieure au cercle polaire (lám. IV, fig. 3.^a).*

Si l'on suit par la pensée, les variations, tantôt positives, tantôt négatives de φ , on voit que la somme algébrique de ces variations est égal à l'angle que font les positions initiale et finale de la tige AS. Si la courbe f est fermée, si, de plus, elle est complètement extérieure au cercle polaire, il est clair qu'en revenant au point de départ la somme de ces variations est égale à zéro. Le style ayant parcouru la courbe f , la somme des aires des quadrilatères curvilignes telles que AA'SS', somme algébrique bien entendu, représente en définitive l'aire balayée par la tige AS, quand le style parcourt l'arc FUG, diminuée de l'aire balayée par cette même tige quand le style décrit l'arc GVF.

En représentant par α et β , sur la figure, les positions extrêmes de la tige, l'aire obtenue par le mouvement continu de cette tige est donc égale à la différence des aires

DFUGED et DVFGE;

c'est donc l'aire Σ cherchée, celle de la courbe f .

D'après (1) la somme des termes tels que $\frac{1}{2} r^2 \varphi$ est égale à zéro, puisque la somme des valeurs de φ est nulle; en désignant par Z la somme des chemins tels que NH, nous avons

$$\Sigma = r \cdot Z. \quad (A)$$

Prenons maintenant la formule (2); le chemin enregistré par la roulette se compose de deux parties : l'une, est la somme des chemins tels que NH , c'est à dire Z ; l'autre, qui est constituée par la somme des termes tels que $p \cdot \varphi$ est nulle; puisque, comme nous venons de l'observer, la somme des variations de φ est nulle. Si nous désignons par γ le chemin enregistré par la roulette, nous pouvons écrire

$$\gamma = Z \quad (B)$$

5. Des formules (A) et (B) nous déduisons le théorème suivant.

THÉOREME I. *Lorsque la courbe considérée f est complètement extérieure au cercle polaire, l'aire de f s'obtient en multipliant le chemin enregistré par la roulette par le rayon r de la tige AS .*

6. Il nous reste à examiner deux autres cas; la circonférence polaire peut couper la courbe f et même lui être complètement extérieure.

Les raisonnements qui précèdent diffèrent de ceux qu'on trouve dans la brochure (*) qu'a publiée Armster et qui traitent le cas que nous venons d'examiner; mais l'exposition que nous allons donner et que nous avons imaginée pour ramener les deux autres cas au premier, simplifie notablement la théorie du planimètre.

7. **DEUXIÈME CAS.** *Le cercle polaire coupe la courbe considérée. Soit X l'aire cherchée (lám. IV, fig. 4.); on a*

$$X = U + V \quad \text{et} \quad \pi R^2 = V + W,$$

*) *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen momente und der Erdg Leitmomente ebenen Figuren insbesondere über einen neuen planimeter von von Jakob Amster professor am Gymnasium in Schaffhausen 1856.*

L'exemplaire que nous avons consulté appartient à la bibliothèque du dépôt général des Fortifications. Cet exemplaire que le colonel de la Noé avait bien voulu mettre à notre disposition renferme une traduction française qui nous a été fort utile, traduction faite en 1869 par le capitaine du génie P. Nassoy, attaché à l'état major de l'Ecole d'application de Metz. Nous croyons devoir donner ici ce renseignement pour les personnes qui voudraient pénétrer plus profondément dans l'étude des planimètres. Elles trouveront, dans la brochure citée, outre de nombreux détails sur la pratique planimètre d'Armster, l'exposition du planimètre d'Oppi-Kofer (on planimètre d'Ernst, comme on l'appelle en France) de celui de Welli et enfin de celui de Decher.

Pour compléter ces renseignements sur les planimètres, nous devons dire que c'est à Oppi-Kofer que semble revenir le mérite de la découverte du principe mathématique de ces instruments. Ernst était, d'après Armster du moins, un simple mécanicien qui a seulement perfectionné le mécanisme de l'instrument.

Depuis lors, on a imaginé beaucoup d'autres planimètres. Outre ceux déjà cités, nous signalerons encore le planimètre de précision de Hohmann-Coradi, celui de Gunther, celui de Kloht sans compter le planimètre suspendu, le planimètre roulant, etc.

La théorie du planimètre roulant a été exposée dans le *Journal de l'arpentage* 1844 (vol XIII, n° 30), et reproduite dans une brochure ayant pour titre : *Planimètre de précision de Hohmann et Coradi* par Luckhardt et Alten (Francfort, 1864).

Enfin, on pourra consulter encore un article de M. A. Thiré *Sur la théorie du planimètre d'Amster* (*Nouvelles annales*, 1866, p 353).

par suite

$$(1) \quad X = \pi R^2 + U - W.$$

On observera que les aires U et W rentrent l'une et l'autre dans celles que nous savons trouver, conformément au théorème donné plus haut, et le problème, au point de vue pratique, se trouve par cela même résolu. Mais on peut donner, pour le deuxième cas qui nous occupe et pour le troisième dont nous allons parler tout à l'heure, un énoncé commun; voici par quelles considérations on y parvient.

Pour trouver U , le style doit parcourir : 1° l'arc MNL , 2° l'arc de cercle LIM ; pour obtenir W , le style décrit CRL , puis LKM .

Finalement le chemin enregistré par la roulette pour ces deux opérations est égal au chemin Z qui eût été enregistré si le style eût parcouru, comme l'indique les flèches 1 et 4, la périphérie de f dans le sens des aiguilles d'une montre, diminuée du chemin Z' qui est enregistré quand le style parcourt le cercle polaire dans le sens inverse du précédent.

Un point délicat et sur lequel Armster (*) ne nous paraît pas s'être expliqué clairement est à noter ici.

Dans la formule (1) U et W désignent les aires prises *en valeur absolue*; lorsque le style décrit le périmètre de l'aire W dans le sens des flèches 3 et 4, c'est à dire, dans le sens inverse de celui qu'il faudrait adopter pour suivre le mouvement des aiguilles d'une montre, le nombre fourni par l'instrument est égal et de *signe contraire* à celui de W .

Si nous représentons par

z	le chemin enregistré par le style décrivant MNL
z_1	 LIM
z_2	 MRL
z_3	 LKM

nous avons, pour les valeurs absolues de U et de W

$$(2) \quad U = r(z_1 + z_2), \quad \text{et} \quad W = -r(z_2 + z_3)$$

formules dans lesquelles z_1 et z_2 devraient être précédés du signe $-$, si l'on voulait expliciter ce signe, ce qui n'est nullement nécessaire.

Les formules (1) et (2) donnent

$$X = \pi R^2 + r(z + z_1) + r(z_2 + z_3);$$

*) Armster dit (*loc cit*) « pour bien comprendre ceci, on pourra d'abord supposer que le cercle polaire enveloppe complètement la courbe » mais les deux cas exigent, il nous semble, deux explications différentes et l'une d'elles, si complète et si claire qu'elle soit, ne dispense pas de donner pour l'autre une explication qui est nécessaire.

observons que $\tau_1 + \tau_2$ représente le chemin enregistré quand le style décrit le cercle polaire L dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est une constante d'une valeur négative que nous représenterons par $-K$.

$$X = rZ + \pi R^2 - Kr = rZ + H.$$

H, dans cette formule, désigne une constante que nous déterminerons tout à l'heure; mais nous envisagerons d'abord le troisième cas, pour montrer qu'il conduit à la même formule.

8. TROISIÈME CAS. *Le cercle polaire enveloppe complètement la courbe donnée.* Imaginons deux circuits arbitraires ML, NR permettant de passer du cercle polaire au périmètre de la courbe et observons, avant d'aller plus loin, que ces circuits étant parcourus par le style, successivement, dans un sens et dans l'autre, comme nous allons l'expliquer, le chemin enregistré par la roulette, par le fait de ces circuits, est nécessairement nulle (lém. IV, fig. 5.^a).

Cette remarque étant faite, écrivons

$$X = \pi R^2 - U - V$$

Les aires U et V peuvent être calculées d'après la règle donnée pour le premier cas, le style suivant, pour U, le chemin 1, 2, 3, 4; et, pour V, le chemin 5, 6, 7, 8.

Abstraction faite des chemins 2, 5; 4, 7 qui donnent, comme nous l'avons observé dans le calcul final un résultat nul, il reste pour évaluer $U + V$: 1° le nombre enregistré par le style parcourant le cercle polaire dans le sens des aiguilles d'une montre, le nombre K comme nous l'avons appelé plus haut, multiplié par r . 2° le chemin enregistré par la roulette quand le style parcourt, comme l'indiquent les flèches 3 et 8 le périmètre de la courbe donnée; ce chemin est égal et de signe contraire à celui que nous désignerons par Z, et qui représente le nombre enregistré par la roulette, quand le style parcourt le périmètre dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous avons donc

$$\text{aire } U + \text{aire } V = Kr - Zr$$

et par suite

$$X = rZ + \pi R^2 - Kr = rZ + H.$$

Ainsi se trouve expliqué, et, nous l'espérons, d'une façon claire, ce fait que la constante H a la même valeur dans les deux cas et, en effet, la théorie que nous exposons, pour être à l'abri de toute équivoque, doit les examiner successivement.

9. CALCUL DE LA CONSTANCE H. Puisque H a la même valeur, quelle que soit l'aire considérée pourvu que sa disposition soit celle que nous avons envisagée au deuxième ou au troisième cas, il est naturel pour déterminer H, de choisir une aire particulière, très simple.

Imaginons par exemple que l'on fasse décrire au style un cercle ayant pour centre le pôle P et pour rayon $R+r$. Dans ce cas, les deux tiges sont dans le prolongement l'une de l'autre et la roulette décrit une circonférence concentrique au cercle polaire et de rayon $R+p$. Le chemin parcouru par la roulette est, dans cette disposition, complètement enregistré; il est égal à $2\pi(R+p)$ et nous pouvons écrire

$$(1) \quad \pi(R+r)^2 = 2\pi r(R+p) + H,$$

d'où

$$(2) \quad H = \pi(R^2 + r^2 - 2rp) \quad (*)$$

10. Nous retrouvons ainsi la valeur de la constante, telle que l'a donnée Amster dans le mémoire cité et nous pouvons, finalement énoncer le théorème suivant qui complète celui que nous avons donné plus haut et, avec lui, fait connaître toute la théorie des planimètres.

THEOREME II. *Lorsque le cercle polaire ne laisse pas la courbe donnée complètement en dehors de lui, l'aire s'obtient en multipliant le chemin enregistré par la roulette par r et en ajoutant à ce produit la constante H.*

La valeur de cette constante se trouve d'ailleurs inscrite sur l'instrument même, pour éviter tout calcul.



LOS PROGRESOS DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO EN 1890

por M. E. VIQARIÉ (1)

Desde hace algunos años hemos tratado de vulgarizar el estudio de la Geometría del triángulo, y de dar á conocer á los lectores del

*) Le mémoire du général Peaucellier (loc. cit. p. 120) renferme, croyons nous une légère erreur. Dans les figures qui accompagnent ce mémoire la roulette est disposée sur le prolongement de la tige SA et les raisonnements sont faits dans cette hypothèse. La valeur H' de la constante est alors égale à $\pi(R^2 + r^2 + 2rp)$ et cela tient à ce que dans l'égalité (1) il faut écrire alors $2\pi r(R+p)$; bref il faut changer p en + p.

(M. Thiré, dans son mémoire, cité plus haut, suppose, aussi que la roulette est placée sur le prolongement de SA, mais il donne, pour la constante la quantité H').

(1) Para poner al corriente á nuestros lectores en estos modernos descubrimientos geo-

Journal de Mathématiques, los puntos más interesantes de esta parte nueva de la ciencia geométrica. Hemos creído que la indicación *sucinta* de los progresos realizados por la misma, durante el año transcurrido, presentaría algún interés. Este es el objeto de la presente Nota.

1. SISTEMAS DE COORDENADAS. Desde el origen de la geometría del triángulo se han empleado casi exclusivamente coordenadas normales y baricéntricas. Los notables estudios de M. Lucas (*Mathesis* 1889) y de M. Poulain (*Journal de mathématiques spéciales*, 1889), sobre las coordenadas tripolares, han dado á este sistema, poco conocido, una gran importancia. M. Lemoine se ha servido notablemente de ellas (*Contributions à la géométrie du triangle* (Association française, 1889 pp 197-222) ⁽¹⁾ en varias cuestiones relativas á los puntos tripolarmente asociados, á los puntos gemelos, etc.

Asociando de cierta manera las coordenadas cartesianas á las coordenadas baricéntricas, se obtiene un nuevo sistema en el cual las coordenadas están tomadas con relación á ejes móviles y que M. Cesáro llama *coordenadas de inercia*. El sabio profesor de la Universidad de Palermo había mostrado ya (*Remarques sur la Géométrie du triangle* (*Nouvelles annales de Mathématiques*, 1887, pp 215-242; *sur la potentielle triangulaire*, N. A. M. 1888) todas las ventajas que se pueden obtener de la consideración de tal sistema de coordenadas, en el estudio particular del triángulo. En un trabajo reciente (*Sur l'emploi des coordonnées baricentriques*, *Mathesis*, 1890, pp 170-190), M. Cesáro hizo de ellas una nueva aplicación, que le ha permitido enunciar una multitud de proposiciones interesantes. Sentimos que la falta de espacio no nos permita extendernos más sobre el asunto.

A estos sistemas es preciso agregar el de las coordenadas angulares, propuesto por M. Poulain (J. de M. S., 1890 *Question*, 282).

2. FIGURAS SEMEJANTES. La teoría de las figuras directa é inversamente semejantes, que ha servido tan frecuentemente para obtener nuevas proposiciones y para dar elegantes demostraciones de otras muchas (círculos de Brocard, de Neuberg, de McCay..., por ejemplo) acaba de completarse. M. Schoute ha enunciado (*Sur les figures planes directement semblables*, *Comptes rendus des sciences de l'Académie des sciences de Paris*, 6 octobre 1890) los teoremas siguientes:

métricos, ofrecemos en este número la traducción del importante artículo de M. Vigarié publicado en el *Journal de mathématiques élémentaires*.

(1) Los *comptes rendus* de las sesiones de la Asociación francesa sólo aparecen al año siguiente de tener lugar el Congreso; aquí analizamos las comunicaciones hechas en el Congreso de París en 1890.

Teorema I. En un plano que contiene dos figuras directamente semejantes F_1 y F_2 , se construye, sobre el segmento $A_1 A_2$ ($O A_1 A_2$ es un cuadrángulo de forma invariable cuyo vértice O es fijo) de la recta que une dos puntos homólogos A_1 y A_2 de F_1 y F_2 , como base, un triángulo $A_1 A_2 A_3$ directamente semejante á otro triángulo $B_1 B_2 B_3$ dado. Si los puntos A_1 y A_2 recorren las figuras F_1 y F_2 , el tercer vértice A_3 describe una tercera figura F_3 directamente semejante á F_1 y á F_2 . Y las tres figuras admiten, dos á dos, el mismo punto doble O .

De este teorema intuitivo y muy general se desprenden, como casos particulares, los siguientes, en apariencia más complicados:

Teorema II. En el plano de las figuras F_1 y F_2 existe una tercera figura F_3 directamente semejante á F_1 y F_2 , de manera que el lugar del punto de intersección P de las tangentes homólogas t_1 y t_2 de dos curvas homólogas C_1 y C_2 de F_1 y F_2 sea la podar de la curva homóloga C_3 de F_3 con respecto á un punto determinado, el punto doble O de F_1 y F_2 , que es al mismo tiempo el punto común de F_1 , F_2 , F_3 .

Teorema III. Además, existe en el mismo plano una figura F_n directamente semejante á F_1 y F_2 , de manera que la envolvente de la recta t_n trazada por el punto de intersección P de t_1 y t_2 , para la cual el ángulo (t_1, t_n) es igual á un ángulo dado α , sea la curva homóloga C_n de F_n . Si α varía, las figuras F_n forman un haz tangencial (lugar de los puntos correspondientes P_n = un círculo envolvente de las rectas correspondientes d_n = un punto) que comprende F_1 y F_2 y en el cual el punto doble O de F_1 y F_2 es el punto doble común.

Teorema IV. En el plano de las dos figuras F_1 y F_2 , donde se han fijado dos puntos homólogos cualesquiera A_1 y A_2 , existe una figura F_m directamente semejante á F_1 y F_2 y un punto A_m , de manera que el lugar del punto P_m que divide en una razón dada m al segmento $P_1 P_2$ de la recta que une la proyección P_1 de A_1 sobre la tangente t_1 de la curva C_1 de F_1 á la proyección P_2 de A_2 sobre la recta homóloga t_2 de F_2 sea la podar de la curva homóloga C_m de F_m con relación á A_m . El punto A_m se halla en $A_1 A_2$ y divide este segmento en la relación dada m . Si m varía, las figuras F_m forman un haz puntual (lugar de los puntos correspondientes P_m = una recta, envolvente de las rectas correspondientes d_m = una parábola) que comprende á F_1 y F_2 , y en el que el punto doble O de F_1 y F_2 es el punto doble común.

Si se reemplazan, en este último enunciado, los dos puntos homólogos A_1 y A_2 , que en él se consideran, por el punto Q_1 de F_1 y el

punto R_2 de F_2 , que no se corresponden, siendo Q_2 el punto homólogo del Q_1 de F_1 en F_2 y R_1 el homólogo del R_2 de F_2 en F_1 se obtiene:

Teorema V. En el plano de las dos figuras directamente semejantes F_1 y F_2 y de los puntos Q_1 y R_2 , existe todavía una figura F_m directamente semejante á F_1 y F_2 en un punto S_m , de manera que el lugar del punto P_m que divide en la razón dada m el segmento $P_1 P_2$ de la recta que une la proyección P_1 de Q_1 sobre la tangente t_1 de la curva C_1 de F_1 á la proyección P_2 de R_2 sobre la recta homóloga t_2 de F_2 sea la podar de la curva homóloga C_m de F_m con relación á S_m . Si m varía, el punto S_m describe una cúbica circular y unicursal. Y los puntos F_1 y F_2 , homólogos á los puntos S_m de las figuras F_m , recorren las circunferencias de círculo descritas sobre $Q_1 R_1$ y $Q_2 R_2$ como cuerdas y capaces del ángulo de las figuras F_1 y F_2 , formado por $Q_1 R_1$ y $Q_2 R_2$.

M. Shoute termina su comunicación por el enunciado de dos problemas que se resuelven fácilmente por el empleo del último teorema.

Debemos mencionar aquí una Memoria muy extensa (86 páginas) y especialmente importante, debida á M. Neuberg. La abundancia y la diversidad de las materias tratadas, el número considerable de teoremas enunciados en este trabajo no nos permite, con gran sentimiento, hacer de él un análisis suficientemente completo para dar del mismo una idea, siquiera aproximada.

No podemos hacer cosa mejor que recomendar su lectura.

Todos los que conocen á M. Neuberg saben con qué rigor y precisión se hallan escritas sus Memorias, y todo el fruto que puede sacarse de su estudio.

En la primera parte de su obra (*Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe, et sur le système de trois figures directement semblables. Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique*, t. XLIV, 1890), M. Neuberg estudia varias series de triángulos (series alijas, ortológicas, axiales, modulares, podares y antipodares) que le permiten dar soluciones elegantes de cuestiones incompletamente resueltas en varias publicaciones matemáticas. Presenta asimismo numerosas proposiciones sobre los puntos tripolarmente asociados, los puntos gemelos, los círculos de Shoute, etc. Estos diversos estudios geométricos se hallan seguidos por desarrollos analíticos. En la segunda parte (pp. 40-86), que es en cierto modo una aplicación de las ideas generales contenidas en la primera, M. Neuberg estudia y completa la teoría de las figuras directamente semejantes. Termina aplicando esta teoría á varios casos particulares.

β. ELEMENTOS DE BROCARD. En este año, como en los precedentes, las cuestiones que se refieren á los elementos de Brocard han sido muy estudiadas.

La genialidad de M. Schlomilch (Journal d'Hoffmann, 1889), que llevó al geómetra alemán á declararse contra las denominaciones de punto y ángulo de Brocard, está aún presente en el ánimo de todos, y nuestros lectores recuerdan también la oportuna contestación de M. Morel (J. E., nov. 1889). M. Mansion ha resumido (*Crelle on Brocard*, Math. 1890, pp. 28-30) los dos artículos de que acabamos de ocuparnos. Su nota termina así:

«No debe insistirse sobre estas denominaciones empleadas demasiado universalmente para que se las pueda cambiar útilmente. Antes más bien sería preferible no hacerlo. Crelle, en su larga carrera, ha olvidado él mismo su memoria de 1816 y abandonado la Geometría. M. Brocard, por el contrario, como M. Lemoine, no ha cesado de trabajar por el progreso de la geometría reciente en los raros ocios que le dejan sus trabajos profesionales. Y es justo que los nombres de ambos permanezcan indisolublemente unidos á la terminología de esta parte de la ciencia, como ha propuesto M. Neuberg.»

Hemos hecho un análisis de la obra que Crelle publicó en 1816 (*Sur un ouvrage de Crelle*, J. E., 1890, pp. 32-35) y hemos mostrado (*Le 176° porisme d'Euclide et ses conséquences*, J. E., 1890, pp. 83-86) cómo, del conocimiento del porisma 176° de Euclides, se pueden deducir las propiedades más elementales del círculo, de los puntos y del ángulo de Brocard. Una demostración de este porisma, más sencilla que la de Chasles, ha sido dada por M. A. C. (*Sur le 176° porisme d'Euclide*, M. 1890, p. 115). M. Lauvenay ha indicado también otra demostración (J. E. 1890, p. 151).

Entre los teoremas, muy numerosos, que se refieren á los elementos de Brocard, debemos indicar el siguiente (Lemoine, loc. cit.)

Si se unen los tres vértices de un triángulo ABC á dos puntos inversos cualesquiera ω_1, ω_2 ; y por ω_1, ω_2 se trazan las perpendiculares respectivamente

á $A\omega_1, A\omega_2$ cortándose en I_a ,

á $B\omega_1, B\omega_2$ — I_b ,

á $C\omega_1, C\omega_2$ — I_c ;

las rectas AI_a, BI_b, CI_c se cortan en I sobre la circunferencia circunscrita y la recta de Simpson de I es perpendicular á la recta $\omega_1\omega_2$. Si ω_1 y ω_2 son los puntos de Brocard, I es el punto de Tarry.

Esta proposición se nos ha comunicado simultáneamente por MM. Lemoine y Tarry.

En una Nota reciente (*Quelques formules relatives aux triangles rectilignes; mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, 1890, tome XLIV), M. Catalan ha considerado los puntos y el ángulo de Brocard y ha evaluado algunas distancias. Consideremos el ángulo ω y los puntos Ω_1, Ω_2 de Brocard, y sea I el centro del círculo inscrito; se hallarán en esta memoria las fórmulas siguientes:

$$O\Omega^2 = \frac{R^2}{n^4} (a^4 + b^4 + c^4 - n^4) = R^2 - B\Omega_1 \cdot C\Omega_2.$$

$$\Omega_1\Omega_2 = \frac{abc}{n^4} \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - n^4} = O\Omega_1 \cdot \frac{4m^2}{n^2}.$$

$$I\Omega_1^2 = \frac{2IR}{n^4} [a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)]$$

$$I\Omega_1^2 + I\Omega_2^2 = 8 \frac{Rr^2}{n^4} [(2R-r)p^2 - r(4R+r)^2];$$

haciendo

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad n^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \quad 2p = a + b + c.$$

(Se concluirá)



LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

La institución de la Escuela politécnica favoreció el espíritu de propaganda, y por consiguiente era natural que además del célebre *Journal* de la misma aparecieran otros periódicos científicos, entre los cuales deben citarse la *Correspondance sur l'École polytechnique* y *Les Annales de Mathématiques* que en Montpellier fundó el distinguido matemático Gergonne, favoreciendo de una manera notable el desenvolvimiento de la Geometría.

En esta época los descubrimientos se suceden sin interrupción, progresando la ciencia por efecto de la suma de conocimientos aportada á la misma por cada individualidad, entre las que se podrían citar muchas de gran valía en esta época, excepcional por lo pródiga en talentos matemáticos, llegando en verdad á ser imposible muchas

veces deslindar el campo, hallar el verdadero inventor de tal ó cual idea en cuya manifestacion han intervenido varios, por efecto de haberlos impulsado á todos su actividad intelectual, solicitada en muy diversos sentidos y bajo distintas influencias, á explorar el abundante filón de verdades. No es de extrañar, pues, esas polémicas que llenan muchas páginas en las obras de Poncelet, donde se trata de vindicar sus derechos de propiedad en determinadas teorías que fueron objeto predilecto de sus investigaciones, tales son, entre otras, las de la dualidad, polares recíprocas, y homología. Y ciertamente que es cuestión árdua el deslindar esta cuestión, por cuanto las mismas ideas pueden ser patrimonio de muchos, y como dice Gergonne en una de sus réplicas á Poncelet, sería preciso antes de publicar una idea leer cuantos autores han escrito, lo cual es más embarazoso que el buscarlas directamente dejando su curso natural á la inteligencia, cuyo trabajo, lento sin embargo, es preferible al de seguir el intrincado tejido de investigaciones realizadas por todos los exploradores del mundo científico.

Las obras de Poncelet constituyen un conjunto de teorías todas referentes al nuevo desenvolvimiento de la Geometría, y aunque no forman un cuerpo de doctrina donde se hallen encadenadas bajo un plan que las incluya bajo cierta unidad, ofrecen un abundante material á quien desee conocer cuanto de esencial constituye este especial orden de conceptos, no todos nuevos, pues radican muchos de ellos en la época de la civilización alejandrina y en los tiempos de Pascal y Desargues, si bien lo principal es resultado de las investigaciones de los geómetras modernos.

Los resultados que la Geometría debe á las investigaciones de Poncelet se hallan contenidos en sus dos obras *Traité des propriétés projectives des figures*, cuya publicación data del año 1822, y sus *Applications d'analyse et de Géométrie*, publicado en 1862. La primera forma la síntesis de sus descubrimientos ó de sus puntos de vista generales respecto á la moderna Geometría, la segunda contiene una serie de trabajos que aparecen como una sucesión de ensayos ó una preparación para analizar definitivamente su obra principal, que es la anterior.

“Un gran número de geómetras distinguidos, como dice Poncelet en su célebre obra, al frente de los que debe colocarse al ilustre Monge, han sentido toda la importancia de los recursos que podía ofrecer la doctrina de las proyecciones en la invención y la demostración de las propiedades de las figuras, Pascal, Lahire, Lambert y más recientemente Carnot en su *Essai sur la Théorie des transver-*

sales, Gergonne, Servois, Ferriot, Durrande, etc. en los *Annales de Mathématiques* han hecho sucesivamente con más ó menos restricción, consideraciones semejantes para extender el resultado de las primeras concepciones geométricas. En fin, Brianchon ha hecho insertar en el cuaderno Xº del *Journal de l'École Polytechnique* una Memoria que presenta sobre asunto, reflexiones á la vez nuevas y extensas. Pero todos estos geómetras, no teniendo como objetivo más que la demostración de algunas propiedades particulares de las figuras, no se han ocupado de una manera especial en buscar los diversos principios que la sola doctrina de las propiedades podría dar, la que hace que, para la mayor parte, estas propiedades habrían podido establecerse de una manera más general y más sencilla todavía, como nos podremos convencer en lo sucesivo “.

(Se continuará)



INDICACIONES GENERALES ACERCA DE ALGUNAS OBRAS

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

PREMIERE PARTIE, ALGÈBRE, PAR M. G. DE LONGCHAMPS

El progreso continuado de la Matemática exige más que en ninguna otra ciencia un progreso correlativo de los métodos, según los cuales deban exponerse, tanto las teorías conocidas desde épocas más ó menos remotas, como las que á ellas se van agrupando, merced al sucesivo incremento constantemente obtenido por esta rama del saber.

Además de las Universidades, donde enseñándose ó debiéndose enseñar la ciencia por la ciencia, atendiendo principal y casi exclusivamente al rigor dogmático y dialéctico, á la concatenación de las verdades dentro del plan general de conocimientos matemáticos, se multiplican las Escuelas técnicas, destinadas principalmente á los estudios de aplicación; y en éstas es forzoso suplir con la rapidez de los procedimientos el esfuerzo que luego ha de necesitar el espíritu para pasar al orden concreto, donde ha de ejercer su actividad muy principalmente.

Uno de los sucesos que han contribuido con gran eficacia á realizar este fin práctico de la ciencia, ha sido el desarrollo adquirido por este grado medio de la Matemática, que se conoce ya con la de-

nomiación de *Matemáticas especiales*; este grado colocado entre los de las elementales y superiores es susceptible de beneficiosas modificaciones y ha llegado á constituir una base desde la que, con segura marcha es luego muy fácil recorrer en cualquier sentido el vasto dominio de las ciencias matemáticas.

No hay para qué citar ahora los varios autores que se han ido sucediendo en los cursos de las Escuelas técnicas, con grandes resultados, abandonados más tarde por otros que han ido satisfaciendo las necesidades crecientes señaladas por la influencia cada vez mayor de las modernas teorías, por su invasión lenta desde las regiones del inventor y del sabio, á las regiones más modestas que les ha ido señalando su divulgación por medio de los propagandistas.

Hoy vamos á ocuparnos exclusivamente de un nuevo libro, debido al notable matemático y publicista M. de Longchamps, y que está destinado á cumplir muy principalmente con los fines de la enseñanza para las clases especiales de matemáticas. Esta obra que constituye la primera parte de su *Cours de Mathématiques spéciales* es la nueva adición de su *Algèbre* poco ha publicada.

En un tomo de 755 páginas M. Longchamps recorre el vasto dominio del Álgebra, á partir desde la división y del análisis combinatorio, hasta terminar con una exposición sucinta, pero no por eso insuficiente de los infinitamente pequeños y de las integrales definidas, completada por el cálculo de las diferencias y la teoría de la interpolación, dando lugar adecuado en este vasto trayecto, no sólo á las teorías ya tan vulgarizadas que conducen á la resolución de las ecuaciones numéricas, y en que juegan combinados los nombres de Rolle, Descartes, Budan, Sturm, Newton y Lagrange, sino que además ocupan su lugar correspondiente los desarrollos necesarios sobre el cálculo de las expresiones imaginarias, la hoy indispensable teoría de los determinantes con su complemento preciso sobre la eliminación, las formas cuadráticas, el discriminante y nociones sobre los invariantes. Esto es lo que en general puede decirse sobre las materias contenidas en el Álgebra de M. de Longchamps.

En cuanto al modo de hallarse desenvueltas estas varias teorías, mucho más explícito se debe ser al tratarse de la disposición de las mismas dentro de la unidad del plan.

M. Longchamps imprime desde el principio al Álgebra su carácter esencialmente combinatorio por el método de demostración adoptados desde la teoría de la división, haciendo aplicación preferente del concepto de *identidad*, llevando su rigor en este punto hasta distinguir en toda la extensión de su obra con un signo especial este

modo de relación del que expresa la simple relación de igualdad, llegando como incidentalmente á algunas identidades importantes de la teoría de los números, así como el primer caso de la ley de recurrencia, que le ofrece el análisis combinatorio, le conduce no sólo á las fórmulas del binomio y del polinomio, sino que además de esta última deduce los teoremas de Euler y de Fermat, terminando con las propiedades del *triángulo aritmético de Pascal* y la suma de pilas de balas, etc.

Sigue empleando el método de las identidades, como en la división, en la extracción de las raíces, determinando los coeficientes sucesivos y llegando á la *ley de la sucesión de los restos*.

Después de la teoría de los determinantes, donde expone los teoremas de Vandermonde y de M. Rouché, relativo este último á las ecuaciones lineales, hace seguir á los números inconmensurables y al cálculo de los radicales la teoría de las expresiones imaginarias, con las indicaciones más precisas respecto á su representación geométrica, que lleva inmediatamente al teorema de Moivre, á los teoremas relativos al método y á la condición de divisibilidad de una función entera por el factor $(x - a - bi)$.

A la teoría de las series hace preceder los principios fundamentales de las series recurrentes, y entre los criterios para la convergencia de las series presenta el teorema de Raabe, conocido también con el nombre de *criterio de Duhamel* expresado por la fórmula

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{1+z},$$

así como el teorema de Gauss.

En la notable lección dedicada á la transformación de las expresiones irracionales, que ofrece más desarrollos que los expuestos en la generalidad de los tratados de Álgebra, resuelve el problema general consistente en hacer racional el denominador de una fracción, cuando éste es la suma algébrica de radicales cuadrados, en número cualquiera, concluyendo por mostrar cómo, en algunos casos sencillos, pueden transformarse expresiones que contienen radicales de tercer grado. Así de

$$x = \frac{P}{\sqrt[s]{x} + \sqrt[s]{\beta}} \quad \text{llega á} \quad x = \frac{P(\sqrt[s]{x^2} - \sqrt[s]{x}\beta + \sqrt[s]{\beta^2})}{x + \beta}.$$

En la teoría de las fracciones continuas se halla incluido el análisis indeterminado.

Al tratar del número e , M. de Longchamps hace una nueva deducción de la serie que lo determina, dando al término complementario la forma

$$E_p = \frac{1}{(p+1)!} \frac{p+2}{p+1} \theta_p.$$

A la teoría de las funciones sigue la de las *formas cuadráticas*, donde se trata de la descomposición en sumas de cuadrados de funciones lineales, homogéneas é independientes, teoría enlazada con las del discriminante y de los invariantes algebraicos.

En la *teoría de las ecuaciones* expone la nueva demostración de M. Walecki concerniente al número de raíces que admite una ecuación entera de grado m , haciendo seguir á los teoremas generales sobre las ecuaciones la teoría de las funciones, é incluyendo en ésta el principio de continuidad: *Sea*

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0$$

una ecuación que admite cierta raíz α con un grado de multiplicidad α ; supongamos que sus coeficientes sean funciones de parámetros variables $t, \theta, \dots$

Si se da á estos parámetros otros valores

$$t + \delta t, \theta + \delta \theta, \dots$$

los coeficientes se reducen á

$$A_0 + \delta A_0, A_1 + \delta A_1, \dots, A_m + \delta A_m;$$

la ecuación

$$F(x) = (A_0 + \delta A_0) x^m + (A_1 + \delta A_1) x^{m-1} + \dots + A_m + \delta A_m = 0,$$

admite α raíces que tienden hacia α cuando $\delta t, \delta \theta, \dots$ tienden hacia cero.

Termina la teoría de las ecuaciones en la lección 40ª que trata de la resolución algebraica de las ecuaciones de 3.º y 4.º grado, así como las nociones sobre las diferenciales y las integrales definidas terminan á su vez con la teoría de las diferencias y de la interpolación.

Pero no solamente encontrará el lector en el álgebra de M. Longchamps una obra, donde las teorías estén tratadas con igual rigor y de una manera completa al mismo tiempo que con cierta originalidad característica, sino que hallándose una gran parte de la misma destinada á ejercicios y problemas entresacados, ya de obras notables, ya de publicaciones periódicas y académicas, encontrará también incluido en el tratado teórico un nuevo tratado práctico á la manera de de complemento del primero, como puede verse examinando además

de los ejercicios expuestos y desarrollados al fin de cada lección los agregados al final de la obra, con el propósito de identificarse en lo posible con las exigencias del programa oficial para el ingreso en la Escuela Politécnica de París.

* * *

INTRODUZIONI ALLA GEOMETRIA ANALITICA

POR EL SR. G. BATTAGLINI, PROFESSORE NELLA UNIVERSITÀ DI NÁPOLI

La Geometría analítica de igual manera que las demás ramas de la ciencia matemática, ha experimentado desde algún tiempo una radical transformación en su organismo. El perfeccionamiento de éste se impone por efecto del progreso continuado en todas direcciones, y el molde antiguo que reducía esta parte de la Matemática al estudio de las secciones cónicas y de las superficies de segundo orden, mediante el empleo de las coordenadas cartesianas y polares, resulta ya demasiado estrecho para contener el nuevo y abundante material que se desborda.

La teoría de las formas, los nuevos sistemas de coordenadas, los métodos de la Geometría moderna y sus fecundos principios han entrado de lleno en el nuevo plan. Y esto se observa ya desde las primeras páginas de la nueva obra que ha comenzado á publicar el célebre geómetra italiano Sr. Battaglini en el *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane*.

Por ahora se limita el Sr. Battaglini á exponer una *Introducción* á la Geometría analítica que se hallará dividida en tres partes, siguiendo el desarrollo histórico de la ciencia; la primera contendrá la Geometría analítica *cartesiana*, dividida á su vez en tres secciones, tratando la primera de los puntos, de las rectas, de los planos, de los círculos y de las esferas; la segunda de las *cónicas*, ó líneas de 2.º grado, y la tercera de los *conicoides*, ó superficies de 2.º grado, con un apéndice que tratará de la Geometría analítica sobre la superficie esférica.

La segunda parte de la *Introducción* contendrá la Geometría analítica proyectiva, en la cual se desarrollará el admirable organismo de la Geometría moderna con el método analítico y el empleo de las coordenadas proyectivas, desenvolviendo los principios de la dualidad y de la homografía, tomando en consideración los elementos en el infinito del espacio. Finalmente, en la tercera parte de la *Introducción* se desarrollará la teoría de la *Representación geométrica de las*

formas algebraicas, en la cual se relacionarán las diversas teorías geométricas con las modernas y fecundas teorías de los invariantes, de los covariantes y de los contravariantes de las formas algebraicas.

Al exponer las nociones preliminares acerca del punto y de la recta en el plano, principia el Sr. Battaglini distinguiendo las relaciones *métricas* de las de *posición*, y tratando, tanto del sistema de puntos en línea recta, determinados por sus *abscisas*, á partir del origen, como del sistema de rectas perteneciente á un punto de un plano y determinadas por su *ángulo de dirección* relativamente á una recta tomada como origen.

Definidas las coordenadas cartesianas y las polares, y expuesto el problema de su transformación, entra de lleno á establecer las *relaciones fundamentales entre los puntos y las rectas en el plano*.

Partiendo de que por tres puntos p, p_1, p_2 de un plano se tenga la relación

$$p, p : p p_2 = k_1 : k_2,$$

llega á la división *armónica* de dos segmentos p, p_2, p', p'' y á la definición de los *conjugados armónicos*, y haciendo coincidir sucesivamente el origen con el punto medio de uno de los segmentos ó con uno de los cuatro puntos, obtiene los segmentos en *progresión armónica* y la fórmula

$$\frac{1}{p, p_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p, p'} + \frac{1}{p, p''} \right)$$

que determina el *medio armónico* p, p_2, p, p' y p, p'' , así como la propiedad de que, en una *progresión armónica*, el producto de los extremos es igual al producto de su medio aritmético por su medio armónico. Y análogas conclusiones deduce al considerar un sistema de cuatro rectas concurrentes en un punto de un plano obteniendo, que

$$\frac{1}{\tan \theta_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta'} + \frac{1}{\tan \theta''} \right),$$

ó bien

$$\frac{1}{\tan r, r_2} = \left(\frac{1}{2 \tan r, p'} + \frac{1}{\tan r, p''} \right).$$

Obtiene enseguida el Sr. Battaglini las fórmulas que expresan las coordenadas de un punto de la recta p, p_2 para el que las distancias á p_1 y p_2 se hallan en la razón $k_1 : k_2$ y las que corresponden á los dos pares $(p_1, p_2), (p', p'')$ de conjugados armónicos.

De una manera sencillísima llega á la ecuación

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_1 - y_1 x_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de la recta que pasa por los puntos p_1 y p_2 , así como á las otras expresiones de la misma, y como á las expresiones de las rectas R' , R'' conjugadas armónicas de las R_1 , R_2 , concluyendo el artículo 3.º con la expresión del área de un polígono por medio de las coordenadas de sus vértices.

El artículo 4.º, titulado *Questioni diversi sui punti, e sulle rette nel piano*, no terminado en las primeras páginas hasta ahora dadas á la publicidad por el Sr. Battaglini, reviste excepcional importancia.

Suponiendo una recta R expresada bajo la forma normal y un sistema de puntos $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ situados en el plano de aquella, cada uno con un coeficiente adjunto k_i determina el centro de las *distancias medias*, y enuncia el teorema relativo á la *suma de los momentos* de un sistema de puntos respecto á una recta; y enseguida, atento por lo que se ve á seguir desarrollando por todo el concepto de la dualidad, considera también varias rectas $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$ y un punto p en un plano, definiendo análogamente el *eje de las distancias medias*, y enunciando la proposición concerniente á la suma de los momentos de un sistema de coeficientes adjuntos á las rectas R_i de un plano respecto del punto p .

Considerando enseguida los segmentos (a_i, b_i) y (a, b) interceptados por las rectas R_i y la recta R en los ejes de coordenadas, llega á las ecuaciones que determinan los *centros de las medias armónicas* de los sistemas de puntos de intersección con dichos ejes, respecto al origen O , centros que se transforman en los de las distancias medias cuando el punto O se halla en el infinito.

Partiendo, en fin, de la ecuación que expresa el eje de las medias armónicas, y suponiendo que todas las rectas R_i concurren en un punto p_0 , en cada una de las cuales se fija, á su vez, un punto p_i , deduce que al girar las rectas alrededor de los puntos fijos p_i , cuando el punto p_0 recorre una recta trazada por el origen, el eje de las medias armónicas del sistema, respecto al origen, girará alrededor del punto fijo, y pasará también por p_0 .

Considera después tres pares de rectas y deduce, haciendo corresponder los lados de los dos triángulos que determinan que "si los puntos de encuentro de los pares de lados correspondientes se hallan en línea recta, las que unen los tres pares de vértices (p_1', p_1''),

(p_2', p_2'') , (p_3', p_3'') concurren en un punto p , siendo aquella recta R y este punto p el eje y el centro de homología de los dos triángulos.

Además, si los puntos de intersección de los pares de los lados correspondientes de un polígono se hallan en línea recta, y las rectas que unen los pares de sus puntos correspondientes, excepto una, concurren en un punto, también la recta que une el par restante de vértices, pasará por el mismo punto, y viceversa.

Estas indicaciones sobre lo publicado de la obra del Sr. Battaglini, son más que suficientes para dejar establecida la importancia y la novedad que ha de tener para los aficionados á la Geometría el tratado destinado á la enseñanza de esta ciencia por el ilustre director del *Giornale di Matematiche* que, tanto en las páginas de éste, desde el año 1863, como en otras publicaciones ó revistas ha contribuido al progreso de la enseñanza y de la ciencia geométrica desde todos sus puntos de vista, según los que pueda ser considerada.

* * *

CURSO DE ANALYSE INFINITESIMAL.

POR F. GOMES TEIXEIRA, DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO
(2.^a edição, 1890. 1 tomo en 4.^o 356 páginas)

Nada dico al lector el título de una obra destinada á la enseñanza cuando éste es común al de las que incesantemente aparecen con el mismo fin, y sobre todo cuando muchas de ellas son frecuentemente sustituibles entre sí por la semejanza en el plan y en el modo de ser éste desarrollado.

No pertenece á este género la obra del Sr. Gomes Teixeira, ya conocido en el mundo científico por sus numerosos trabajos sobre el análisis matemático, pues al escribir un libro para la enseñanza, lo ha hecho transmitiendo al mismo su criterio personal, ideas propias que ha elaborado dándolas á conocer en diversas ocasiones. De manera que, además de lo que aprenda el alumno en un curso ordinario de Análisis infinitesimal, puede adquirir en el libro del Sr. Gomes Teixeira muchas ideas de detalle acerca del sutilísimo concepto de la continuidad y de los infinitos, omitidos ó incompletamente expuestos en otros libros.

Precede á la obra una *Introducción* donde se trata de los números irracionales, negativos ó imaginarios y de las reglas para su cálculo, así como se exponen después los principios generales de la teoría de las funciones.

Siendo imposible, ó al menos muy difícil, discernir actualmente lo que hay exclusivamente propio en cada autor y lo que pertenece

á esta acción continua y general que prosigue la Humanidad en su progreso, y que se suma constantemente formando síntesis cada vez más vastas y perfectas, el mérito de un autor de cualquier obra destinada á la enseñanza, estriba en el talento con que ha elegido lo más notable, tanto en conceptos como en procedimientos y en el modo de unir estos materiales extraños á aquéllo que es fruto de sus propias investigaciones y caracteriza su individualidad científica.

Esto se observa en la obra del Sr. Gomes Teixeira.

Al principiar su obra por la exposición de las operaciones de la Aritmética y del Álgebra, enumera las leyes fundamentales de cada una, según costumbre ya corriente en las obras más correctas.

Al tratar de los números irracionales, lleva á la exposición que hace algo de lo que con más detalle y con distinto propósito se halla en las obras de Dedekind y Tannery.

Al ocuparse de la noción de límite, reduce la cuestión de la existencia de límite para una cantidad variable á averiguar si cierta cantidad tiende ó no hacia cero, según un teorema importante de Cauchy.

En la exposición de las series hace referencia á importantes observaciones publicadas en el *Journal de Sciences mathématiques* debidas á los Sres. Lerch, Cesàro, Gützmer y Weyr, dando á conocer un teorema debido á M. Jensen⁽¹⁾, terminando con las consideraciones más precisas relativas al círculo de convergencia, á las series uniformemente convergentes en una área ó en un intervalo dado y á la serie hipergeométrica, y completando estas nociones con las correspondientes á los productos infinitos y á las fracciones continuas.

Para el estudio general de las funciones hace preceder el teorema del Sr. Weierstrass acerca de los valores de una función correspondientes á los de la variable comprendidos entre dos números A y B, desarrollando con especial cuidado lo concerniente á la continuidad de la función, que extiende al caso de ser ésta continua en el punto $(a, b, c, \dots)$, y termina la Introducción con las funciones exponencial, logarítmica, circulares directas é inversas é hiperbólicas.

El capítulo I del cálculo diferencial está dedicado á las nociones de infinitamente pequeño y de derivada, fijándose tanto en el caso en que ésta es determinada como en el caso contrario y en la importante circunstancia de que una función continua pueda no tener derivada, pasando á su expresión mediante la relación de dos infinitamente pequeños.

Los artículos dedicados á las relaciones entre las funciones y sus

(1) *Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, 1889.

derivadas, á las funciones de muchas variables y al de las derivadas de las funciones de variables imaginarias y el de las funciones implícitas son notables por la claridad y sencillez con que al alumno se ofrecen estos difíciles puntos de la asignatura, y especialmente el último en que se trata de las ecuaciones de derivadas parciales, y que termina con los teoremas que establecen las condiciones generales para la existencia de la derivada de las funciones implícitas, conduciendo en fin, á las derivadas de determinantes y á los determinantes funcionales.

Después de exponer en el capítulo III las aplicaciones geométricas que llegan al estudio de las curvas en el espacio, las superficies, las curvas y superficies envolventes, en el capítulo IV encuentra el lector un importante cuerpo de doctrina que se refiere á multitud de trabajos recientes de diversos matemáticos de la actualidad, sobre las derivadas y diferenciales de orden cualquiera.

Comienza este capítulo por la deducción de la fórmula de Leibnitz, extendida al caso de la función $y = u_1 u_2 \dots u_m$.

El caso de ser $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, lleva al Sr. Gomes Teixeira á desarrollos enlazados con sus notables artículos *Sur les dérivées d'ordre quelconque* ⁽¹⁾ *Ueber einen Satz der Zahlentheorie* ⁽²⁾ y á importantes observaciones dependientes de la teoría de las combinaciones.

Para el caso en que

$$y = f(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad u_1 = x_1(x), \quad u_2 = x_2(x), \dots, \quad u_r = x_r(x).$$

sigue el procedimiento empleado en un artículo publicado en el tomo XVIII del *Giornale di Matematiche*, y hace referencias al artículo publicado por el Sr. Oliveira Ramos en el *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (tomo VII).

Al tratar de los números de Bernoulli tambien hace referencia el Sr. Gomes Teixeira á otro artículo publicado en *American Journal of Mathematics* (Baltimore, tomo VII), y obtiene además una nueva fórmula para calcular estos números. Demuestra asimismo la fórmula de Waring, según lo hizo en el tomo VII de los *Nouvelles Annales des mathématiques* (3.ª serie), y tambien reproduce otro artículo suyo publicado en este periódico concerniente á las relaciones entre las funciones y sus derivadas.

Sin detenernos en estos puntos que revelan la novedad de los

(1) *Giornale di Matematiche* de Battaglini, vol. XIII.

(2) *Archiv der Mathematik und Physik* (1885) Leipzig.

desarrollos debidos al Sr. Gomes Teixeira, como demostración del teorema de Eisenstein, el análisis que hace del problema de la interpolación y otros asuntos presentados con la originalidad que predomina en toda la obra, haremos especial mención de las materias contenidas en los últimos capítulos de ésta, dedicados á las funciones definidas por series, á las singularidades de las funciones y á las funciones de variables imaginarias.

Después de tratar de las *funciones discontinuas en puntos aislados* expone el principio fundamental del *método de la condensación de las singularidades* debido á Hankel, segun exposición hecha por el señor Dini en sus *Fundamenti per la teoria delle funzione di variabili reali*, es decir, el método por el que, partiendo de una función con un número limitado de singularidades se forma una función con infinitas singularidades. Presenta un ejemplo debido al Sr. Weierstrass de una función continua que no tiene derivada, haciendo tambien referencia á otros ejemplos contenidos en la *Mémoire sur les fonctions discontinues* de M. Darboux.

En cuanto á las funciones de variables imaginarias, principia por definir la *función monogena ó analítica* de z en todo el plano, donde hace referencia el Sr. Gomes Teixeira á su artículo sobre las *funciones con espacios lagunares* y á resultados debidos á los Sres. Lerch, Tannery y Schröder. Expone una importante fórmula debida á M. Darboux, en el caso de extenderse la fórmula de Taylor á las funciones de variables imaginarias y la demostración que de ella dió M. Mansion en el *Bulletin de l'Academie de Belgique*. Dá á conocer otra demostración del matemático aleman Sr. Weierstrass sobre el desarrollo de las funciones en series. Pasa después á tratar de las funciones *regulares en un punto z_0 y en todo el plano*. Para desarrollar esta cuestión hace notar que Euler, Cauchy, Gauss, etc., obtuvieron en ciertos casos particulares la expresión de las funciones trascendentes enteras por un producto de factores que hacen explícitas sus raíces, y observa que este notable resultado ha sido completamente establecido por el eminente geómetra de Berlin Sr. Weierstrass en el teorema siguiente:

Dada una serie de cantidades $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$ colocadas según el orden creciente de sus módulos y que satisfacen á la condición

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left| a_c \right| = \infty, \text{ se puede construir una función trascendente entera por medio de la fórmula}$$

$$(1) \quad f(z) = z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c} \right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \quad S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k,$$

cuyas raíces son $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, y cuyos grados respectivos de multiplicidad son $n_0, n_1, \dots, n_c, \dots$.

Recíprocamente, si $f_1(z)$ representa una función entera cuyas raíces son $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$ y los grados respectivos de multiplicidad $n_0, n_1, \dots, n_c, \dots$, esta función puede descomponerse en factores que hacen explícitas estas raíces, por medio de la fórmula

$$(1) \quad f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c \frac{z}{a_c}},$$

en la que $\varphi(z)$ representa una función entera,

y á continuación de este teorema expone el Sr. Gómez Teixeira la demostración debida al profesor de la Universidad de Stokolmo señor Mittag-Leffler.

Después de tratar de las funciones uniformes regulares enteras, examina el Sr. Gomes Teixeira las no enteras que son regulares en todos los puntos del plano, excepto en los puntos aislados $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, llamados por el Sr. Weirstrass *polos* cuando m es finito y *puntos singulares esenciales*, cuando m es infinito. Y termina su tratado de cálculo diferencial con el teorema del Sr. Mittag-Leffler, por el que este matemático extendió al caso de tener una función infinitos polos y puntos singulares esenciales, la descomposición establecida por el Sr. Weierstrass en el caso de ser finito este número.

Tal es el resumen de lo contenido en la obra del Sr. Gomes Teixeira, obra á la par que elemental y rigurosa muy adecuada para iniciar á cuantos la estudien en los progresos más recientes del análisis, y en las más variadas cuestiones tratadas en la actualidad por los más distinguidos analistas contemporáneos, de cuyos trabajos é intervención en los últimos perfeccionamientos de este ramo de la Matemática pone al corriente la portentosa erudición del Sr. Gomes Teixeira.

Z. G. DE GALDEANO



VARIEDADES

El círculo matemático de Palermo. En todas las naciones cultas van multiplicándose y adquiriendo importancia las asociaciones científicas cuyo principal objeto es el desarrollo é incremento de tal

ó cual ciencia. El círculo matemático de Palermo, que cuenta ya más de cuatro años de existencia, teniendo entre sus socios las celebridades matemáticas de Italia y algunas del extranjero, llena estos fines del progreso con respecto á las ciencias matemáticas, principalmente por medio de sesiones quincenales, por la publicación del periódico *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, donde se dan á conocer los extractos verbales de las sesiones, las Notas ó Memorias originales comunicadas por los socios y aprobadas por la Comisión de redacción y el boletín bibliográfico de producciones nacionales y extranjeras, y en fin, por medio de su biblioteca constantemente acrecentada, ya mediante el cambio con otras publicaciones científicas nacionales y del extranjero, ya con obras adquiridas ó recibidas como donativo.

En los dos primeros fascículos correspondientes á este año se hallan publicados los siguientes artículos: *Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions* par M. le Dr. V. Schlegel. — *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba*, nota 1.^a di L. Berzolari, in Pavia. — *Sull'estensione della legge di Newton ai sistemi stellari binarii*, nota di Francesco Porro, in Torino. — *Sul moto brachistocrono*, nota di G. Pennachiotti, in Catania. — *Revue annuelle d'Analyse*, par M. Emile Picard, á París.

* * *

D. Cecilio Pujazón. Hace poco más de un mes falleció víctima de una pulmonía el ilustrado marino, director del Observatorio astronómico de San Fernando, socio corresponsal de la Academia de ciencias de Madrid, D. Cecilio Pujazon, que con su actividad y trabajos de varia índole, contribuyó á acreditar tan renombrado Establecimiento, ocupándose últimamente en la colosal empresa que prosiguen hoy todos los observatorios, á saber, la obtención de la carta fotográfica del cielo, como monumento científico que el siglo XIX legará á las generaciones venideras.

Sentimos, por falta de noticias detalladas, no poder actualmente unir al recuerdo del ilustre marino y colaborador de *El Progreso MATEMÁTICO*, la relación de los trabajos que se deben á su asiduidad y talento.