

El Progreso matemático

PERIÓDICO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS

DIRECTOR: D. ZOEL G. DE GALDEANO

LA MATEMATICA

SU IMPORTANCIA Y PREEMINENCIA ACTUALES ⁽¹⁾

¿Qué será la ciencia *integral*?... Os lo habréis preguntado, quizá como yo, muchas veces y acaso también como yo, os habéis contestado: no lo sé.

Pero tomando por guía una especie de postulado que tiene algo de verdadero, por ser uno el origen de todo: *en todos los órdenes de existencias hay fenómenos análogos*, busco en el mundo espiritual analogías con el material, que nos es más conocido. No debemos dejarnos arrebatar ciegamente por ellas, es cierto, porque llevan muchas veces á graves desvarios, pero el símil es luz que aclara los conceptos, y en este sentido permitidme el siguiente:

La materia cósmica esparcida por la creación, está repartida en átomos, moléculas, cuerpos, asteroides, satélites, planetas, soles, sistemas.... y todos sostienen á todos, y nada hay, ni el menor corpúsculo quizá, que pueda aniquilarse sin turbar el equilibrio entero por faltar esa parte necesaria en la atracción universal, en ese amor inconsciente y especial de la materia, producido acaso como ella misma, por el fluido *gravífico* en que se halla sumergida. ⁽²⁾

Así las ideas, las verdades, las ciencias.... forman, quizá, un conjunto *integral*, un todo solidario, en que nada puede suprimirse; el

(1) Este escrito es el fondo de un discurso pronunciado en la noche del 8 de Mayo de 1891 por el comandante profesor de la Academia de Ingenieros D. Nicolás Ugarte, en el Ateneo de Guadalajara, con motivo de una interesante discusión sobre *Utilidad é importancia relativa de las Ciencias*, planteada por el jefe del Distrito Forestal D. Benito Angel.

Para su publicación ha sido convenientemente modificado y anotado por su autor.

(2) Le P. Leray.—(Constitution de la matière et ses mouvements, nature et cause de la pesanteur).—Art. 5.º pág. 122, explica el cómo tomando por base las corrientes etéreas en todos sentidos puede explicarse la ley general de Newton.

menor aniquilamiento traería también un disturbio completo en ese amor, en esa atracción recíproca de las verdades, producida, acaso como ellas mismas, por otra *Verdad* inmensa en que todas viven sumergidas.

Pero ni todos los cuerpos que flotan en aquel fluido gravífico tienen el mismo volumen, ni la misma masa, ni el mismo desarrollo, ni la misma trayectoria y velocidad, ni la misma importancia relativa..... sin que por eso deje de haber igualdad absoluta en las acciones y reacciones y en la ley (newtoniana ó no) que en función de las distancias rige aquellas atracciones. ⁽¹⁾

Lo mismo sucede, quizá, en el universo de las verdades y de las ciencias. Todas tienen el mismo origen y son como átomos y moléculas de la ciencia *integral*; pero ni pueden ser iguales en su desarrollo, ni en aplicaciones, ni en importancia.....

En la desigualdad aparente está, sin duda, el equilibrio real dinámico en todas las esferas. Verdad es ésta, que cuando penetre en todas las inteligencias de cada mundo, hará de éste un paraíso, como hace de los mundos materiales un armonioso conjunto donde impera la justicia absoluta escrita en leyes mecánicas.

Pero descendamos de esas alturas á nuestras realidades, y veamos qué es la ciencia en general, qué una particular, y empecemos á sacar consecuencias.

La ciencia, dicen unos, es el conocimiento de las leyes que rigen el universo; es, según otros, el conocimiento de la realidad tal cual es; la sabiduría de las cosas por principios; el conocimiento de las cosas por sus causas; el conocimiento de la verdad; el saber coordinado; un sistema de verdades dependientes unas de otras y todas de alguna fundamental evidente ó demostrada.....

De estas definiciones y otras análogas, podemos sacar, como Huxley, una representación genérica, aprovechando la ingeniosa idea de Galton, á saber: con muchas *negativas* de retratos individuales (del mismo tamaño y posición) superpuestas, se obtiene una *positiva* en que, desapareciendo los rasgos individuales, aparecen solo los característicos de la familia.

Hagamos una cosa parecida con esas definiciones; superpongámoslas y fácilmente se verá que solo quedan, como rasgos caracte-

(1) M. Bousinesq (París 1880.—*Leçons synthétiques de Mécanique générale*—4.^a leçon), indica la gran probabilidad de que la ley de Newton no rija en las distancias interatómicas. Quizá tiene la ley general una fórmula más compleja en que los valores de las acciones mutuas pueden ser positivos ó negativos y pasar por cero varias veces según las distancias.

rísticos de la ciencia, estos dos: *Verdades y enlace* ó bien proposiciones á demostrar y método, sistema.

Conocimientos falsos no forman ciencia, verdades aisladas tampoco.

¿Qué es la verdad? La ecuación entre el pensamiento y la cosa pensada, la conformidad entre la idea y el objeto.

¿Cuál es el mejor método científico?... Cada ciencia tendrá el más adecuado; pero no hay duda que, según dice Pascal: el mejor consiste en definir con precisión todos los términos y demostrar todas las proposiciones.

En el cumplimiento de tales condiciones no tiene rival la matemática pura, y hasta de sus términos echan mano las otras ciencias, cuando desean expresarse con exactitud, como habéis oído y como vais á oír.

¿Qué es definir? Asignar la diferencia de *algo* dentro de su género; marcar su género próximo y última diferencia, como dice la lógica... ó hablando vulgarmente: definir es asignar límites precisos á las ideas, fijar el valor exacto de las palabras. En la verdadera definición no cabe más ni menos que el objeto definido, es el marco exacto que la contiene; si éste es grande la definición es mala, por entrar en él algo que sobra, si pequeño, también, porque no puede contener el objeto definido.

Ahora bien, todo lo que existe se reduce á espíritu y materia: sujeto y objeto; el yo y el no yo; llamadlo como querais. Las ciencias que á esos extremos se refieran podrán dividirse en dos grandes grupos: uno de las puramente subjetivas, otro de las objetivas. Todas tendrán por base la observación y la experiencia. El entendimiento encuentra ya hechos, formados, los seres que pretende conocer; pero ni la esencia de la materia, ni la del espíritu nos es dado, hasta ahora, penetrar. Es evidente, pues, que tropezarán esas ciencias con términos que no podrán definir, con proposiciones que no podrán demostrar.

La matemática se construye el camino antes de marchar por él, se forma el objeto mismo de su conocimiento, y, como ciencia de la *Cantidad* y del *orden*; como ciencia de la magnitud medible; como ciencia de lo continuo y de lo discontinuo; del número del tiempo y del espacio; de lo concreto y de lo abstracto; de lo ideal é imaginario, y hasta de lo finito y de lo infinito..... en el *modo* y *forma* que ella misma se lo forja, ha de tener forzosamente exactas sus definiciones, porque según dice el mismo Pascal, respecto de los números "el espíritu abraza por entero y limita con precisión los conceptos de que es autor."

Con tal exactitud, es evidente que ni hay, ni puede haber definición de las cosas ni de las ideas. Si así fuera ¡cuántas discusiones interminables estarían pronto terminadas!

También Kant ⁽¹⁾ (y la mayor parte de los que se ocupan en este asunto) repite: que "solamente los conceptos matemáticos tienen definición segura y justa, porque la definición se confunde con la idea y no contiene ni más ni menos que ella."

Si definir con precisión es difícil en las demás ciencias, mayor dificultad es para las mismas, probar todas sus proposiciones, de tal modo, que la evidencia ó categoría, aunque mediata, lo sea como la de los axiomas ó principios fundamentales.

La verdad matemática no es discutible, ó no existe ó brilla como la luz del sol, y lo mismo penetra la evidencia en el teorema de Pitágoras, en el de Ptolomeo, en el de Menelao..... que es obvia en cualquier axioma y como la de éste, las verdades que aquéllos encierran son *necesarias, universales, permanentes*, y la ciencia que las contiene superior sin duda, ó de orden más elevado, que las que solo cobijan verdades contingentes, particulares, variables.

No hay duda..., todo en el universo es medible en algun sentido, aunque no sepamos hacerlo, ó está sujeto á leyes numéricas aunque no las conozcamos, ó entra en alguna función, ó obedece á algun concepto de orden, de combinación de posición..... aunque lo ignoremos. Nada puede haber casual, caprichoso, y podríamos decir con el libro de la sabiduría "sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti," ⁽²⁾ y añadir que la cantidad, por lo mucho que á ella se reduce, es la categoría principal de cuanto existe.

En el mundo material, quizá puede asegurarse, que es supremo el concepto de cantidad y que los modernos adelantos van reduciendo á ésta la cualidad y otros conceptos como color, temperatura, posición, etc.

El dolor, el sentimiento, la alegría..... pueden tenerse por cantidades, cabiendo la posibilidad de compararlas, de igualarlas y medirlas, y si en todas las ciencias entra algo real ó imaginario, medible de algun modo directo ó indirecto, allí estará implícitamente la matemática dándole vida, aunque desconozcamos la fórmula.

Esta ciencia que lleva con razon el glorioso título de exacta, sin ser experimental, marcha de acuerdo con la experiencia, y el mundo

(1) Crítica de la razón pura.

(2) Sapi.—Cap. XI v. 21.

material está como sometido á sus leyes y sin ser puramente subjetiva, se abisma también en las abstracciones más puras del alma.

Hay en ella algo superior á todas, porque en todas tiene ingerencia, es además la ciencia que las enlaza.

No es un simple artificio, un método, es la misma lógica en acción, sin que pueda siempre decirse que solo es una lógica *cifrada ó figurada* (1), porque tiene una materia especial de su conocimiento. Es algo así como la doble entidad del ser animado: éste no existe si en él no se reúnen materia y alma. Una y otra son precisas, pero el alma es superior, como principio supra-físico, que concebimos capaz de existir por sí solo ó actuando sobre cuerpos diferentes.

La ciencia necesita una materia, un cuerpo, un objeto de conocimiento, pero también un alma que la *plé vida*, que la dirija..., y esa alma es cuando ménos la lógica, matemática del espíritu, como la llaman algunos filósofos, y esa lógica no es sino el comienzo de otra superior en cierto modo, que encierra un poder oculto en su mágico simbolismo, y que sin los trámites lentos del silogismo y sorites.... lleva á veces, á los rincones más apartados del universo, sus certeras consecuencias.

Ella puede existir por sí sola, porque nacida de la pura actividad del espíritu, éste se ha creado en sus conceptos una materia ideal, un cuerpo, digámoslo así, semi-espiritual, en que no ha intervenido el mundo material sino como causa determinante.

Donde no penetran sus benéficos resplandores, casi todo es incierto, vago, confuso..., y por eso todas las ciencias la reclaman á porfía y es feliz la que en todo ó en parte logra ser fecundada por ella, encontrando algun resqueicio por donde entre su divina claridad.

No por eso penseis que es para mí la matemática *actual* una ciencia perfecta, no. Si tal creyera, habría de suponer terminada, en ese sentido, nuestra evolución y harto sé, que somos pobres pigmeos, que apenas levantamos unos cuantos milímetros del polvo de la ignorancia. Pero todo en el mundo es relativo, y es obvio que las demás ciencias, con el mismo abolengo, igualmente dignas y respetables, alguna quizá más importante por su objeto, están en un estado más embrionario aun ¡Al César lo que es del César y á Dios lo que es de Dios!

No se eche en cara al matemático que no sabe definir el tiempo y el espacio, conceptos primordiales, que tampoco define el metafísico, pero que sin definirlos, tiene aquél la clara videncia íntima que de los mismos necesita para su empleo en la ciencia exacta.

(1) Así la llama Bourdeau *Théorie des Sciences*.—T. 1.º pág. 326 (París 1882), y aunque lo hace en su alabanza, conveniente será no confundirlo con los artificios de Raimundo Lulio.

No hay que excitar el sentimentalismo con frases rebuscadas y períodos ampulosos, para poner de manifiesto la superioridad del espíritu, que nadie niega, y deducir consecuencias baladíes sobre las piedras de un arco, por ejemplo, en que todo obedece á leyes de *materia bruta*... porque es más fácil pasar y reir, que detenerse y pensar.

¡Antes de llegar ese tosco material á ser dovela, han tenido que ponerse en tensión todas las facultades del espíritu y recorrer extensos campos de ciencia, que no puede comprender el que solo es metafísico!

No hay en fin, que acudir á las palabras del autor del "Genio del Cristianismo," (1) para ridiculizar aquella ciencia, ni á otras frases más ó menos ingeniosas, contra la misma ó los que la profesan, porque la risa ó el ridículo que se quiere producir, recae sobre el mismo que pretende empañar reputaciones tan bien sentadas como las de Arquímedes, Descartes, Newton... ni se logra otra cosa que perder el tiempo y extraviar la razón de los que desconocen la matemática, con los sofismas de Hobbes (2) ó afirmando con Gibbon, que es enemiga de la evidencia moral, ó asegurando que conduce al abismo y luego al crimen, ó torciendo quizá el sentido de las palabras de San Pablo, condenando de una vez á todas, al sentar que "*las ciencias hinchan engrien y solo producen orgullo*," cuando el matemático huye del sofisma busca con afán la evidencia, y sabe también (añadía un malogrado y querido compañero, (3) para los que como Chateaubriand se precian de ortodoxos) "que si todo eso no fuera ridículo, sería anticatólico, y que entre los dones del Espíritu-Santo está justamente la Sabiduría."

Toman otros como ataque algunos artículos escritos por Krause (4) al comenzar el siglo, dirigidos á reformar la matemática. El gran talento de este filósofo actuó como potente microscopio para

(1) Su libro décimo: *Filosofía*=Cap. 1.ª *Astronomía y Matemáticas*, es un ataque á éstas unas veces violento, voluminoso otras, pueril las más y hasta contradictorio, porque hay párrafos que tomados solos serían su apología. El autor desconocía indudablemente esas ciencias, y sin reparar en los medios, se le ve marchar directamente al objeto que se propuso y que consiguió, en parte, con su talento nada vulgar, puesto de manifiesto en su célebre obra citada escrita á raíz de los terribles sucesos de la Revolución francesa.

(2) Todas las biografías de este filósofo, que hemos consultado, están conformes en que era muy dado á la paradoja y al sofisma.

(3) Supremacía de la matemática.—Discurso leído por su autor (el entonces Teniente Coronel Comandante de Ingenieros D. Carlos Vila) al inaugurarse las conferencias militares de Aragón (1880).

(4) Traducción de los mismos por los Sres. Rute y Giner de los Rios, insertos en una obra de este, titulada *Estudios filosóficos y religiosos*, (1876); véase pág. 169. En la 175 advierte Krause que todo aquel estudio es incompleto, y más adelante, que solo á los que están familiarizados con estudios filosóficos puede esperar ser completamente inteligible.)

abultar en su imaginación verdaderas nimiedades. No se comprende de otro modo que pudiera tomar por defectos graves de aquella ciencia el tener entre sus nombres, los de *matemática*, *aritmética*, *geometría*... *razones aritmética y geométrica*... *proporción*, cantidades *positivas y negativas* (éstas, según él, deben ser *opositivas*). Nada significa que no le plazcan los signos (+) más, (−) menos ó (∞) infinito, ó que no tenga signo especial el *límite*: y no hay tampoco en nuestro concepto motivo de tantas exclamaciones porque se diera á la matemática la sintética definición de *Ciencia de la Cantidad*...

Nuestro filósofo deduce, después de pasar revista á varias definiciones ininteligibles y llenar muchas páginas en explicar sus indagaciones, que la matemática debe definirse: *Doctrina de la totalidad*, en la que (según la parte misma se contiene en el todo) se encuentra comprendida la de la *parteidad*.

No quiero abusar de la paciencia del lector (si alguno hubiere) contestando esos extremos; verdaderamente no merecen una detención formal y puede el matemático quedar tranquilo, porque el mismo Krause le hace justicia, en medio de ese ataque (mal entendido por muchos de los que le toman por suyo) llamando á la matemática como lo hace más tarde Eugenio Pelletán, *ciencia de las ciencias*, por su evidencia, y confesando que "no ha hecho caso de su escrito el mundo inteligente."

No es la vez primera que sabios de tanta altura, caen en pequeñas análogas después de trabajos considerables. Del insigne Ampère decía nuestro filósofo don Meliton Martín ⁽¹⁾, refiriéndose á la clasificación que aquél intentó hacer de los conocimientos humanos: "no conocemos una suma de esfuerzos más gigantescos que haya dado resultado más ruin y contraproducente."

Permitidme sin embargo una ligera digresión en favor del nombre de nuestra ciencia.

Los idiomas cambian como todo, y es natural que muchas palabras no tengan hoy ni el significado, ni la comprensión, ni el aspecto siquiera que tuvieron en su origen. No hay más que registrar los diccionarios etimológicos para convencerse de tales transformaciones y del origen común que tuvieron palabras hoy antitéticas ó de muy diversa significación. ¿Quién diría por ejemplo que *príncipe* y *cabo* tienen el mismo origen, *caput*? que *rey* y *corrección* nacen de *régula*? *babar* y *exordio* de *oriri*; *pulgada* y *pollino* de *pusillum*, *pulex*? ⁽²⁾ etc.

(1) Conato de clasificación de los conocimientos humanos. —pág. 11.

(2) Roque-Barcia.—Formación de la lengua española (1872).

Otras hay cuyo origen sería imposible descifrar á no estar en el secreto, como *cadáver* y *cábala*, tomada la primera como reunión de tres palabras latinas ⁽¹⁾ y refiriéndonos en la segunda á la palabra inglesa *cabal* que puede representar, por la reunión de sus iniciales, los apellidos de los que formaron la camarilla que un tiempo rigió los destinos de la gran Bretaña, en tiempos de Carlos II ⁽²⁾

¡Matemática!... palabra es ésta que podrá rechazar, como Krausse, un alemán, aficionado, como todos, á sacar los términos técnicos de su propio idioma, que se presta á la aglutinación, pero nunca un español, sino es enemigo de esa ciencia, porque se encierra en ese vocablo un precioso abolengo.

Μαθηματικά, ciencia; τα μαθηματικά, las ciencias. Su raíz sanscrita *Man* es según Curcio pensar; recordar ⁽³⁾. Quizás tienen el mismo origen las voces *Man*, *Mann* (*hombre* en lenguas anglo germanas) que según el filólogo Max-Müller, significa el *medidor* ⁽⁴⁾, y esto me trae á la mente la definición del hombre dada por Protágoras: el hombre es la medida de todas las cosas ⁽⁵⁾.

Todo prueba que ha sido tenida la matemática desde muy antiguo como la ciencia por excelencia, y si su nombre no indica su objeto, lo que pasa en la mayoría de las palabras, es al menos, por las *noblezas que sintetiza*, un escudo digno de tal señora.

Menos conformidad con su origen tiene el de otras ciencias que tanto se preconizan, sin que esto signifique nada en contra suya.

Filosofía era en tiempo de Aristóteles "el sistema general de concepciones humanas. Así lo indica en cierto modo su origen griego (amor á la sabiduría) pero hoy se usa ya en sentido mucho más restringido por la imposibilidad de que sea, como era entonces, el hombre enciclopédico, y casi ha quedado reducida á la *metafísica*.

Hé aquí otra palabra de más pobre origen y menos relación con su contenido, μαθηματικά φυσικά, ó post-physics, como podría decirse en latín, cuyo significado es: *después de las cosas naturales*, nombre dado, según unos, por el mismo Aristóteles, puesto según otros, por Andró-

(1) Diccionario de Roque-Barcia.—*ca-ro, da-ta, ver-mibus*. etimología que, como el autor citado, nos parece tan ingeniosa como poco exacta.

(2) *Cábala*.—Diccionario Hispano-Americano. La palabra *cábala* del hebreo *Kabalah* significa cosa recibida por tradición. No es ésta á la que nos referimos, sino á la indicada en el mismo diccionario juntando las iniciales de Clifford, Arlington, Buckingham, Ashley y Landerbat que formaron la camarilla dicha arriba, y en este concepto la palabra inglesa *cabal* (Diccionario de Newman y Barrett) significa junta de personas reunidas para alguna intriga.

(3) Diccionario de Larousse.—*Mathématique*.

(4) Bourdeau.—*Théorie des Sciences*.—T. I.º, metrologie, pág. 197.

(5) Balmes.—*Historia de la Filosofía*.—pág. 39 (8.ª edición, Barcelona, 1863).

nico el Ródio al clasificar las obras de aquel filósofo y colocar esa ciencia, después de las naturales. ⁽¹⁾

Pero dejemos ya todas estas disquisiciones, que si tienen para algunos mucho atractivo, no encierran para el matemático más que sutilezas de valor dudoso.

La Matemática, apenas constituida, recogió tantos afluentes, que pronto formaron caudaloso río, y desde muy antiguo, nadie que anhelara ser filósofo hubiera podido prescindir de su estudio tomado como base de conocimientos ulteriores.

Las verdades de las otras ciencias forman, no hay duda, un hermoso conjunto de perlas de rocío, que se van fundiendo acá y allá, en algunos lugares, pero permanecen aún en muchos separadas y hasta temerosas de que algun descubrimiento, cual imprudente contacto, las deshaga y evapore.

Solo allí, donde el astro divino de la matemática les dá vida, forman ya pequeños lagos, origen de algunos arroyuelos, y es de esperar, por las leyes y relaciones que cada día se descubren, que los albores de la misma luzcan pronto en todas ellas.

Recorramos rápidamente las principales, y nos daremos cuenta de la verdad de nuestro aserto.

Las ciencias naturales, en la parte que domina la materia inerte, deben estar altamente influidas por las leyes que rigen ésta, en las cuales toma preponderancia la matemática.

Haüy ha hecho ver en la mineralogía, que no es posible comprender los sistemas cristalinos sin previo estudio, no ya de la geometría elemental, sino de sus más preciados teoremas superiores.

Nada hay en la geología que, aunque apoyándose en hipótesis, no saque partido de la matemática y ciencias que en ésta descansan, ya para indagar la aparición de la tierra en el sistema planetario y seguirla en su condensación, formación del núcleo y costra, explicando de un modo verosímil el número y coordinación de capas que forman ésta, ya siguiendo otras mil vicisitudes hasta la aparición de la vida sobre ella y el reparto y circulación de los gases y líquidos que animan los organismos y hasta la dependencia casi absoluta del sol, en que nacen todas sus energías materiales.

Sin ese enlace matemático, sin leyes que rigieran las formaciones geológicas, no hubiera podido el Abate Paramell ⁽²⁾ ejercer la cari-

(1) Balmes. — *Metafísica*. — Advertencia primera y Larousse Dictionario — *Métaphysique*.

(2) Este abate, como es sabido, por un método elemental geométrico y conocedor profundo

dad, sacando de la miseria las comarcas del Lot, áridas y mortíferas y dotarlas de centenares de manantiales, que ese sábio cuanto modesto sacerdote descubrió, marchando con seguridad asombrosa por encima de su oculto cauce y aforándolos con precisión, aún antes de su alumbramiento

Si pasamos á las ciencias que podemos llamar biológicas, observamos ya dentro de la botánica, que la matemática preside en cierto modo al número y forma de los estambres y pistilos, su situación y demás circunstancias para la mejor fecundación. En los tallos y troncos macizos ó huecos reina la economía de la materia compaginada con máximas resistencias, según la teoría matemática de la elasticidad. La vida de los árboles se mide por el número de sus capas anuales, y hasta la orientación puede deducirse por la forma y desarrollo de éstas en los distintos puntos de su perímetro en casos determinados.

Cuando han de cumplirse condiciones contradictorias como el vivir dentro del agua y no poderse fecundar sumergidas, una irritabilidad, especie de poder director, guía la planta para hacer compatibles tales extremos, y el tallo ó los estambres y estigmas toman el movimiento ó la forma geométrica que más á ello se presta. La *Vallisneria spiralis* que vive bajo las aguas del Ródano y del Ebro, en la época de sus amores desarrolla su tallo cuya forma indica el nombre, y cumplidos sus deberes, vuelve á dormir tranquila en el fondo de las aguas ⁽¹⁾.

La Zoología hace comprender maravillas análogas, recorriendo sus escalas desde los seres más inferiores á los organismos más complicados.

En los más próximos al mineral, reinan como en éste, las formas geométricas; pueden en cierto modo estudiarse como los cristales por sus ejes dispuestos de un modo *regular*; un poco más elevados llevan en su esqueleto ese conjunto de ejes regulares, y no parece sino que la simetría respecto á ejes determinados es la ley de los seres animados de toda la escala zoológica.

Dignos de hacerse son los estudios sobre la forma y disposición

del orden y superposición de las formaciones geológicas, indicó en 40 departamentos 10.275 manantiales, teniendo éxito completo en más de 9.000

En el Lot, objeto primero de sus desvelos, como cura ecónomo, en 1818, de la parroquia de San Juan de Lespinasse, y en donde era un terrible azote la escasez de agua para hombres y bestias, dejó corrientes más de 1.500. (Arte de descubrir manantiales 1827) traducción del presbitero Sr. Soldevilla 1863—pág. 361.

(1) Galdé—Historia natural—(1855) pág. 402: trozo de un poema de Castell.

matemática de las espirales y valvas de muchos moluscos, las maravillosas construcciones suspendidas ó no ó subterráneas, de las distintas clases de hormigas, y otra multitud de insectos, sobre la disposición, forma y suspensión de nidos de muchas aves, sobre las construcciones hidráulicas del castor y fortificaciones complicadas del topo, etc., etc.; pero no podemos detenernos en sus detalles, y solo para fijarnos en un ejemplo bien conocido de todos, vamos á ocuparnos un instante de un himenóptero notable y útil por multitud de conceptos: la abeja.

Este insecto resuelve de un modo admirable el problema del gasto mínimo de cera en la construcción de sus panales, sin que por eso disminuya el contenido de la miel.

Para que los alvéolos puedan-justa ponerse, sin dejar huecos inútiles, dice el matemático que si aquéllos han de ser prismáticos de sección recta *regular*, solamente los triángulos, cuadrados y exágonos pueden cumplir aquella condición, y este último polígono es el que debe elegirse para economía de líneas y por tanto de tabiques, porque á igualdad de perímetros es el que mayor superficie encierra, como más cercana al círculo; ese es precisamente el que la abeja emplea para sus prismas alveolares.

Cada panal no es un grupo solo de celdillas, sino dos grupos dispuestos simétricamente respecto á un plano medio, y con relación á éste, uno tiene las entradas de las celdillas á un lado y el otro al opuesto. Los prismas exagonales que forman éstas, no son dos á dos prolongación uno de otro en ambos conjuntos, sino que el eje de cada prisma ó celdilla de un sistema es, prolongado, una arista de unión de tres del opuesto. Tal disposición es necesaria para la 3.ª parte del problema, tan fácil quizá como las otras para el insecto, pero más difícil y admirable para el hombre que sobre ello reflexiona.

El fondo de dichas cavidades ó prismas exagonales, parece á primera vista que debiera ser plano, pero no hay tal, es un tetraedro de caras laterales idénticas, diferentes de la base, que es el triángulo equilátero inscrito en cada exágono y cuyo vértice es un punto especial del eje, que distaría del fondo si fuera plano, la cantidad representada por $\frac{r}{4} \sqrt{2}$, siendo r el lado del exágono dicho. Las caras de aquel tetraedro, se prolongan chaflanando ó sustituyendo cada una á un vértice del prisma exagonal, tomando (por sus intersecciones con las caras del prisma) la forma de rombos iguales ⁽¹⁾ y tales, que la

(1) Los ángulos obtusos de estos rombos concurrentes en el vértice de la pirámide son de 109° 28', según *Trançon* (Récréations mathématiques et physiques — Paris — 1778. Tomo 1.º

superficie total del alvéolo así formado, no solo es menor que si el fondo fuera plano, sino que resulta ser un *mínimo matemático*, respecto á todas las figuras análogas, que puedan construirse, variando la posición del vértice del tetraedro. Fácilmente puede verse, que el volumen de esas figuras no altera, cualquiera que sea el vértice escogido, porque en este caso particular de base exagonal, los tres pequeños tetraedros suprimidos en los chaflanes, son iguales á otros tres, de que puede considerarse compuesta la pirámide triangular, que se añade.

Cuanto más avanza el conocimiento de las cosas, mayor y más sublimes son las relaciones matemáticas, que en ellas se descubren y aunque no las conozcamos, nunca hay razón para negar su existencia ó por lo menos su posibilidad.

La actividad, el instinto, la inteligencia, la razón... son términos quizá de la misma serie, y si nuestro ser se da cuenta, antes de su *estado* que de sus *actos*, es preciso, para su progreso, que luego se dé cuenta de su *objeto* y conozca despues las *leyes*, y éstas no son sino fórmulas que sintetizan hechos.

Tratamos de concordar lo divergente, y vamos tras de lo inmutable de que debe ser un reflejo ó una expresión lo matemático.

La anatomía, la fisiología, la patología que se apoyan en otras ciencias, que con la matemática se enlazan, sacan de ésta muy preciadas explicaciones, adelantos notables y aplicaciones sin cuento.

Con su auxilio explícate el por qué de ciertas cavidades y bóvedas óseas admirablemente dispuestas; la disposición y forma de los huesos y estuches medulares; la inserción y el empleo mecánico de los músculos; las envoltentes vasculares, los engrases sinoviales No hay posibilidad de penetrar en la óptica fisiológica de Helmholtz sin conocer las matemáticas superiores, y el patólogo y el terapéutico le pagan tributo en tantos aparatos de que disponen, como sifmógrafos, miógrafos, cardiógrafos... estetócopos, laringóscopos, oftalmóscopos.. raquígrafos, espirómetros, toracómetros... etc., etc., que con sus trazados gráficos ó con mil otras indicaciones, les sirven de poderosos

página 329). Nuestro cálculo directo, nos ha dado para tangente de la mitad de dichos ángulos $\sqrt{2}$, que corresponde, en efecto, á un ángulo de $54^{\circ} 44', 8''$ próximamente y portanto su doble es con diferencia de $16''$ el que dice *Ozanones* que solo indica el problema sin resolverle.

Este ángulo, cuya $\text{tg.} = \sqrt{2}$, goza de la particularidad matemática de ser el único cuyo *doble* tiene tambien *tangente trigonométrica doble* en valor absoluto, si bien negativa, por ser obtuso el ángulo, como puede comprobarse aplicando la fórmula correspondiente. A la vez la *tangente trigonométrica* de los ángulos diedros (que fácilmente se vé son de 120°) es $-\sqrt{3}$, igual en valor absoluto á la del ángulo mitad.

auxiliares en su afán muy laudable y filantrópico. La sencilla higiene sería un mito sin el concurso de la matemática para resolver interesantes problemas de construcciones, calefacción, ventilación, etc.

Las cifras y la geometría aplicada á los geroglíficos han influido mucho en el descubrimiento de rasgos característicos para la historia de algunos pueblos.

Allí está el poema *Mahabharata* ⁽¹⁾ en que se descubren las diversas civilizaciones que en él han intervenido, por los sistemas *decimal* y el *sexdecimal* sin valor relativo de posición, que en él se observan. Allí también la gran pirámide Cheops ⁽²⁾ que habla al mundo inteligente con su forma, sus dimensiones, su orientación, sus detalles en magnitudes y figuras geométricas, dando mil noticias del saber de sus constructores y de la civilización de su tiempo en el único lenguaje que puede hablar la matemática.

Allí, en fin, están todas las disposiciones y construcciones arquitectónicas antiguas y modernas, que obedecieron á esa ciencia y son lenguas, que aclaran de mil modos diversos la historia de los pueblos.

La Hacienda, el seguro, la estadística ⁽³⁾ han hecho progresos grandes en manos de hábiles matemáticos como Moivre, Baily, Simpson.

Gossen, Menges, Stanley, Walras, notables profesores de economía política y de distintas nacionalidades, hicieron participar á esta ciencia del influjo matemático.

Fórmulas hay con que se presiente una solución justa para el problema pavoroso de la asociación y el trabajo, interviniendo en ellas el cálculo infinitesimal con sus cuestiones de máximos y mínimos.

Mr. Gross con sus fórmulas, que deslindan los derechos sucesivos de los hijos naturales, indica la ingerencia de la matemática en el derecho civil, y es necesario su auxilio en todas las tasaciones, particiones, deslindes, etc.

El sufragio en cuyo fondo, como dice el Sr. Bosch (memoria citada) "le descubre el problema de la soberanía, en que descansa el derecho público," empieza á recibir también sus benéficos effluvios, gracias al sabio Ministro dinamarqués Mr. Andrø, que inventó el

(1) Poema indio, anterior quizás al Ramayana. Se dice que el autor es Wyása á que otros tienen por simple compilador.—Todo el poema versa sobre la guerra entre las familias de dos hermanos: Pandú y Dhitarásthra; el primero tuvo cinco hijos de encarnación divina, el segundo tuvo ciento.

(2) Pizzi Smith—1875—Traducción del inglés por el abate Moigno.

(3) Discurso de recepción del Sr. Bosch y Fustigueras en la Academia de Ciencias (28 de Marzo 1890). De él tomamos este pequeño resumen de aplicaciones al Derecho

ociente electoral, que podemos representar por $\frac{\sum (\text{votantes})}{\sum (\text{candidatos})}$, desarrollado luego con maestría por M. Thomas Hare.

Para que veáis como el matemático, sin más que ligeras nociones puede á veces dirimir contiendas de otras ciencias, perdonad que me detenga un momento en un problema curioso de economía política ⁽¹⁾, que ha de dar una norma de la luz, que difunde la matemática, en todas las cuestiones en que puede ingerirse por cualquier concepto.

¿Es el libre cambio ó el proteccionismo absoluto el que produce mayor ingreso en las Aduanas?

Los defensores de cada extremo se van ciegos con su sistema, y el matemático, juez imparcial, ni con unos ni con otros. Puede hacer evidente que ambos se equivocan en general, y hasta fijar, si tuviera datos estadísticos bastantes, á qué distancia de esos extremos está en cada caso el mayor beneficio para el fisco.

Concebid dos ejes coordenados rectangulares. Sobre el de las Y contemos (en sus unidades propias representadas por una magnitud lineal) la *importación total* de una mercancía dada; sobre el de las X tomemos el derecho arancelario que á cada unidad corresponde. Así fijáramos un punto; pero, si tuviéramos datos suficientes, podríamos construir toda la curva $f(xy) = 0$ de *importaciones y derechos*. A pesar de no conocer ésta, tenemos lo bastante para terminar la discusión.

Es evidente que el área del rectángulo formado por una ordenada y una abscisa, es decir, el producto xy , representa, para un derecho dado x , el ingreso total. A medida que bajan los *derechos*, la importación será mayor, pero no crece, ni puede crecer, de un modo ilimitado hasta infinito, y por tanto, para *derecho* = cero, habrá un valor límite de *importación* = a , por ejemplo. De un modo análogo, creciendo los derechos, llegará un momento en que será forzosamente nula la importación, esto es: para $x = b$, $y = 0$.

Esta curva, cualquiera que sea, corta pues á los dosejes en los puntos $(x = 0, y = a)$, $(x = b, y = 0)$, y por tanto el producto xy , representante del ingreso, es cero para ambos. Necesariamente habrá en su trayecto un punto fácilmente determinable, si se conoce aquélla, para el cual el producto dicho sea un máximo, y por ello el más conveniente para el fisco. Como se vé, no estará ni con el libre cambio ni con el proteccionismo absoluto. Si $f(xy)$ fuera una línea recta estaría en su punto medio ⁽²⁾

(1) Echegaray.—Contestación al discurso citado del Sr. Bosch.

(2) Si la recta $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ fuera la $f(xy)$ de importaciones y derechos,

$xy = z = -\frac{a}{b}x^2 + ax$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{2ax}{b} + a = 0$, dñ: $x = \frac{b}{2}$.

Bien sabeis, cómo la matemática se ha ingerido en multitud de problemas sociales por el cálculo de probabilidades, y cómo es una necesidad en todas las ciencias de observación, bajo la forma de teoría de errores probables, rectificando fórmulas con el método de *mínimos cuadrados*, que tantos beneficios reporta á dichas ciencias.

Es óbvio también, el cómo los adelantos matemáticos influyen en la ciencia de la Guerra, que necesita el auxilio de todas por ser, según dijo nuestro ya citado compañero ⁽¹⁾ «el conjunto de las leyes, que rigen á la creación, sostenimiento y manejo de los ejércitos de mar y tierra,» y por entrar en ella el hombre con su *inteligencia* y su *corazón*, la industria con todos sus adelantos, el terreno con todas sus circunstancias y hasta el cielo con sus rigores.

Aun estamos en el tristísimo período de nuestra evolución, en que la efusión de preciosa sangre es á veces irremediable, preciso es, en contraposición, poner en juego todo nuestro saber para economizarla y anularla si es posible. La victoria debe ganarla el espíritu, no la materia..... debe ser patrimonio de la razón, no de la fuerza.

¡Llor á los que, en todo género de conquistas, imitan el ejemplo de Vauban, escogitando un medio, un trazado, una regla matemática, que sin perder gente, decida de la suerte de las plazas! Locos ó mal avisados son los que juzgan del mérito de una idea, de un adelanto de una conquista moral ó material, por el número total de víctimas, sin restar las inútiles, que cuesta á la humanidad.

El precio de lo que hoy poseemos es, en junto, lo que nos precede, pero hay que conceder poquísimo valor y asignarlo á veces negativo, en ese coste total, á las hecatombes originadas por la malicia ó por la soberbia humana, manteniendo ideas y sistemas inútiles ó perjudiciales y sacrificando á la conveniencia de unos cuantos, la vida de los demás.

Con tales antecedentes el desastre se hace matemáticamente preciso, para volver al hombre al sendero de la verdad y del progreso. La ciencia exacta, que es la verdad y el progreso mismo, no puede ser causa directa de tales colisiones, y este es un lauro más, nunca una mengua, que solo un cerebro mal organizado puede echarle en cara.

Nadie puede negar que la matemática es el alma de la astronomía y lo es hoy también de la física y la química. Los sabios están de acuerdo en admitir que las leyes físicas y químicas son, en último análisis, reductibles á ecuaciones diferenciales, que unen unas á otras las transformaciones sucesivas de la materia.

(1) Sr. Vila.—Discurso citado, pág. 13.

Con el auxilio de la mecánica y del cálculo, y á veces tomando solo por guía la sencilla ley de continuidad matemática, llegan á predecirse fenómenos, que luego comprueban la observación y la experiencia.

Así Foucault, con un simple péndulo, pone en evidencia el rodar de nuestro globo; Bradley, con el precedente de Rømer ⁽¹⁾ nos hace ver en las aberraciones estelares, reflejada en cierto modo en el firmamento, la órbita terrestre; Leverrier adivina la existencia de Neptuno y Bessel la del misterioso compañero de Sirio; la ley de Bode ⁽²⁾ truncada, hace comprender algo entre Marte y Júpiter donde hoy se cuentan centenares de asteroides; Hamilton predice fenómenos de refracción, que comprueba la experiencia; Mendelejeff las propiedades del *Ekaboro*, que debe llenar una laguna entre el *Boro* y el *Itorio* y las del *Ekaaluminio*, que colmará otra entre el *Aluminio* y el *Indio* ⁽³⁾; ó anuncia Newton un combustible en el diamante, ó Dumas que bebemos en el agua un *óxido metálico*.

¿A qué cansarnos en recorrer ciencias positivas y adelantos? No hay más que reflexionar un momento sobre lo que sería aún, sin la matemática, la industria humana, y en lo que sin ésta fuera el estado actual de la humanidad. ¡Tendríamos sin duda que desandar el camino hecho por ella y fuéramos á parar á un estado del hombre muy próximo al del salvaje!..... No corriéramos por mar y tierra con esas velocidades que anulan distancias, ni habláramos y casi nos viéramos á otras inconcebibles, ni gozáramos de otras mil maravillas de la electricidad. Estaría sin tocar el monte Cenís; intacto el San Gotardo, ni se dieran la mano el Mediterráneo y el mar Rojo; ni estuvieran á

(1) Sabido es que Rømer en sus observaciones de los satélites de Júpiter llegó á comprender que la velocidad de la luz no es infinita, la determinó y le sirvió para ello el retraso que notabas sus observaciones entre la hora en que anotaba los eclipses y la en que debía verificarse, según el cálculo, en dos situaciones opuestas de la tierra en su órbita. -- Las aberraciones no son sino efecto de composición de la velocidad de la luz con la de la tierra en cada instante, lo que hace ver las estrellas, no donde están, sino en puntos distintos, según la velocidad terrestre, que forman una pequeña elipse al rededor de la verdadera.

(2) Esta ley, debida á Titius, fué reproducida por Bode en 1778; consiste en que escribiendo la progresión 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384..... sin más que añadir 4 á todos los términos y dividir luego por 10; resulta una regla práctica para hallar las distancias de los planetas al sol, tomando la de la tierra por unidad. Todas salen bastante aproximadas, menos la de Neptuno, que debe ser 30, 04.

(3) Théories modernes de la chimie..... Par Lóthar Meyer, traducción del alemán por Albert Bloch (París 1887). Tomo I, pág. 197. Lecoq de Boisbaudran descubre el *Gallio*, que coincide con el *Ekaaluminio* y Nilson el *Scandio* que demuestra Clobel ser el *Ekaboro*. La densidad dada por Lecoq al primero era 4,87. Mendelejeff asignó 5,90; la experiencia ha confirmado que es 5,96. Nilson fijó en 170 el peso atómico del *Scandio*. Mendelejeff 45, Nilson rectificó más tarde y le asignó 43.

punto de darse un cariñoso abrazo el Atlántico y el Pacífico. No tuviéramos siquiera vestidos, ni alimentos, ni viviendas cómodas y saludables, ni supiéramos si la tierra se mueve ó el sol anda, y seguirían mudos esos rayos de luz que hoy nos cuentan los secretos del firmamento. El trueno y el relámpago continuarían siendo causa de nuestra adoración y nuestro espanto, y la lucha y destrucción sería quizás nuestra enseña, en vez de ese lábaro precioso de caridad que se vislumbra en lejanía..... Sería, en fin, mezquino todavía nuestro ser, y veríamos aun pequeño al mismo Dios, siendo infinito.

También la metafísica paga á la ciencia exacta su tributo. Lamar-tine define el sentido común: media rigurosa de la opinión en el Universo y en todos tiempos.

La matemática está implícitamente en todo lo bello, porque como tal es verdadero y es la verdad una *ecuación*; y tened en cuenta que lo verdadero, como dice *Boileau*, es lo único digno de ser amado. (Rien n'est beau que le vrai, le vrai seul est aimable.)

El fondo de lo verdadero, lo bueno y lo bello es el orden ⁽¹⁾ y este es un concepto que á la matemática corresponde.

El hombre ama naturalmente la belleza, porque, como repite Malebranche, al menos la belleza que es objeto del espíritu, es visiblemente una imitación del orden.

El poeta, el pintor, el músico, hacen matemática casi siempre de un modo instintivo, sin que por eso sea menos real; tambien existe aquella, como vimos, en el panal de las abejas sin que el insecto se de cuenta de ello.

Leibnitz dice de la música «operación aritmética que ejecuta el alma sin saberlo» y el P. Nicéron llamaba á la perspectiva «fabricadora de milagros» que no son sino triunfos conseguidos por notables artistas con el auxilio de la geometría, llevada en alas de su genio.

Algo que con lo dicho se relaciona, pudiéramos decir de lo que puede comprenderse en los escritos del matemático Hoëne Wronski ⁽²⁾

(1) Tisandier.—Traducción española.—(Madrid 1860) pág. 49..... Se podría pues decir, en último análisis, que lo verdadero, lo bueno y lo bello, considerados en su modo de realizarse en el mundo, no son sino la representación del orden absoluto, por la idea pura, por el signo plástico ó el lenguaje ó por el acto de la voluntad humana.

(2) Polaco nacido en Possen, Teniente Coronel que fué de Artillería al servicio de Rusia. Se hizo ciudadano francés y murió en Neully el año 1853. Escribió una porción de obras notables; nos parece la más principal la que lleva su fecha de impresión, 15 de Agosto de 1847 en París y cuyo título es: *Messianisme ou réforme absolue du savoir humain, nommément réforme des Mathématiques comme prototype de l'accomplissement des sciences et réforme de la Philosophie, comme base de l'accomplissement de la religion.*

Su notable portada indica aquella cabeza de imaginación fogosa; dentro de un gran zodiaco

que á la vez que trata de dar un impulso grande á la matemática, pretendiendo resolver de un modo general toda clase de ecuaciones, y dar solución también á todos los grandes problemas de matemática y física, se remonta al descubrimiento de leyes nuevas y á explicar con ellas los problemas científicos y filosóficos más intrincados, las realidades supremas del hombre, el génesis de todas sus facultades hiperfísicas, los problemas de religión absoluta y hasta el origen *celeste* del bien y el *infernal* del mal. En resumen, á caballo sobre el mismo infinito, como diría *Fleury* ⁽¹⁾ acomete, con terrible empuje, cuanto hay de absoluto en filosofía, religión, física, matemáticas, en el hombre, en el universo, llegando hasta el mismo Dios.

Dejó, sin duda, tarea para el siglo XX... ¿Hubo acaso algun extravío en su razón? no lo sé. Es triste ley de la humanidad tener como dementes á los que por cualquier concepto se remontan sobre las demás inteligencias. Mirémoslos sin embargo, con muchísimo respeto, porque estos locos son, de ordinario, los que hacen marchar al mundo.

A cada adelanto material corresponde otro en el orden moral. La matemática que es segun A. Comte ⁽²⁾ «más bien la base verdadera y fundamental de la filosofía, que una parte constituyente de la filosofía natural» los enlaza, los hermana y en sus alas los lleva muy allá, donde el astro de verdad derrama en todos sentidos destellos admirables.

Cuando la astronomía, auxiliada de su nuevo sentido, el telescopio, sondeó el macrocosmos y la matemática le prestó su ayuda midiendo distancias, superficies, volúmenes, densidades... en el fondo de la inmensidad, se atrevió el hombre á formular la idea trascendental de que cada estrella pudiera ser un sol con su cortejo planetario y cada planeta un mundo como el nuestro con todos sus corolarios, y á inducir la pluralidad de mundos y de existencias. Hizo de la tierra, antes Señora, una tierra vasallo miserable; pero al menguar ésta por la ciencia, se agrandó al infinito la idea del *Creador*.

A la vez el microscopio descendió al microcosmos, y la matemática dedujo y confirmó leyes de analogía, que enlazan lo grande lo inmensurable del firmamento, con lo pequeño con lo inmedible ató-

envuelto en nubes, se ven sus fórmulas más preciadas, unas debajo de otras, las tres siguientes:

$$Lex\ suprema = Fx = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + \dots; \text{ tal como: } x^m \equiv a. \pmod{M};$$

$$Problema\ universal: 0 = f/x + x_1/fx_1 + x_2/fx_2 + \dots$$

(1) Le calcul infinitesimal fondé sur des principes rationnels... Pag. 10.

(2) A. Comte.—Cours de Philosophie positive. - T. I. pág. 86. (2.ª edición, París 1964.)

mico, y viendo en todo solidaridad, unidad, vida y movimiento..... quedó el hombre confundido con su ignorancia y pequeñez, pero agrandó su ser moral al confesarla, al comprenderla.

¡Os fatigo sin duda!... ¡hay que condensar tanto lo que dá de sí para muchos libros!

Con lo que voy á deciros, quisiera que los que, por sus aficiones especiales, no han tenido precisión de ciertos estudios, pudieran columbrar alguna de las bellezas que se ciernen en las elevadas regiones de la ciencia, y que vienen en apoyo de mi tesis, á la vez que pueden servirme de auxilio para penetrar más tarde en el tenebroso problema de la libertad moral.

El que pasa los umbrales del cálculo transcendente y del hipertranscendente, llamados de ordinario, diferencial, integral y de variaciones, comprende pronto sus defectos, que nada sin ellos existe; pero queda sorprendido ante esas maravillas á que se remonta el hombre por el más grande, por el más noble, por el más sublime esfuerzo de ese *quid divinum*, que en él se esconde.

Podemos añadir con Humboldt ⁽¹⁾ que: «el trabajo del espíritu se manifiesta con toda elevación y grandeza allí donde, sin tener necesidad de medios exteriores y materiales, toma todo su brillo del desarrollo matemático del pensamiento y de la pura abstracción. Hay un encanto que cautiva, y que ha sido celebrado por toda la antigüedad, en la contemplación de las verdades matemáticas, en las eternas relaciones del tiempo y del espacio, que se manifiestan en los sonidos, en los números, en las líneas...

Perfeccionándose el instrumento, puramente intelectual, del análisis ha desarrollado á su vez, una fecundidad no menos preciosa por sí misma, que por las riquezas que engendra. Gracias á este instrumento, la contemplación física del mundo ha podido denunciar, lo mismo las causas de fluctuación periódica, que se producen en la superficie de los mares, que las perturbaciones planetarias, y descubrir en las esferas de la tierra y del cielo nuevos horizontes sin límites ni medida.»

Nada surge de repente, todo precisa una larga y misteriosa gestación, pasando á veces siglos y siglos, sin llegar á las ideas el instante de su alumbramiento.

No pudo ser una excepción ese análisis sublime *infinitesimal*. Arquímedes en su método de *extinción* (exhaustion), con que dedujo aproximadamente muchas áreas y cuadró exactamente la parábola,

(1) Cosmos. T. I.º, pág. 426. (París. 1847).

tuvo una especie de presentimiento, que se continuó, muchos siglos mas tarde, en el triángulo infinitesimal de Fermat, en los métodos de tangentes de éste y de Barrow, en los indivisibles de Cavallieri, en las últimas razones y en las fluxiones y fluentes de Newton, que le dan verdadero nacimiento y en los infinitamente pequeños de Leibnitz, con que toma forma práctica su empleo.

Con ese nuevo instrumento de análisis se alcanza lo que no es posible lograr con otro alguno. Se hace en cierto modo el milagro de integrar y desintegrar la cantidad variable, cualquiera que sea su expresión cifrada. Se reducen sus elementos á fórmula conocida y se juntan ó se integran, sumándolos por infinitos. Pareciendo que se juega con puros ceros, con idealidades despreciables, se manejan *indirectamente*, las funciones con que de un modo especial se enlazan, y se hallan éstas como *totales* de asombrosa realidad, que resuelven con facilidad suma cuestiones muy complicadas.

Compréndese el entusiasmo de Huyghens cuando en 1692 escribía el marqués de L'Hôpital: «veo con sorpresa y admiración el alcance y fecundidad de este arte; á cualquier lado que vuelva la vista contemplo nuevas aplicaciones, y concibo con él una especulación y un progreso infinitos.» (1)

Se hace entrar en el cálculo un nuevo signo, representante fiel de la variabilidad de la cantidad, aun antes de que varíe, pudiendo distinguirla por esa especie de *propensión* á variar, que es su *coeficiente diferencial*, que es su *derivada*, capaz de determinarla, como caracter único y peculiar suyo, que puede distinguirla entre todas las funciones de la misma variable.

Esa *derivada*, ese coeficiente diferencial, con relación al tiempo, cociente de misteriosos ideales que no por eso dejan de dar un resultado real, cuando son homogéneos ó del mismo orden ideal, es una función determinada del estado actual mismo, y como diría Boussinesq (2) «la expresión de esta verdad de sentido comun: el presente engendra el porvenir, y hay una estrecha relación entre lo que es y lo que será.» Tiene por tanto altísima importancia, en filosofía, en historia natural y social, en física, en química, en economía política y financiera... y debiera por lo mismo, serles familiar á los demás sabios como á los geómetras y físicos.

Con ese prodigioso cálculo se penetra, con seguro paso, en las

(1) A. Comte, curso citado. t. I, pág. 178. [Nota.]

(2) Conciliation du véritable déterminisme mécanique, avec l'existence de la vie et la liberté morale (par M. J. Boussinesq professeur de la Faculté des Sciences de Lille. — Gauthier-Villars, Paris 1879.) Pág. 36.

leyes de la cantidad, que varía por incrementos positivos ó negativos, en relación con los de la variable ó variables de que depende y le están sometidos todos los problemas, que atañen á la forma general de las cantidades, á sus simplificaciones, á sus desarrollos en serie..... todos los de máximos y mínimos absolutos y relativos, todos los de tangentes, normales, curvaturas, envolventes, evolutas... todos los de rectificaciones de líneas, cuadratura de superficies, cubaturas de volúmenes y millares de ellos más, que con los mismos se relacionan y otros imposibles de enumerar.

Entra con pié firme en multitud de cuestiones físicas, químicas mecánicas..... simplificando relaciones de partida, porque se establecen entre cantidades que hacen el papel de elementales; y explica el porqué de superposiciones de efectos, y de las reflexiones y refracciones, las formas de las superficies originadas por rayos reflejos y refractados, y marca direcciones, y determina velocidades y magnitudes de ondas, fluidas ó etéreas..... y montones de verdades y hechos brotan al contacto de esa vara mágica, que forman firmísima escollera, cimiento de múltiples ciencias, de que arrancan frondosas ramas, á quienes enlaza, sostiene y vivifica el alma de todas ellas: la matemática.

Ese precioso análisis penetra también en las honduras del tiempo y del espacio, de las fuerzas y las masas, y despues de animar una geometría especial de *cuatro dimensiones*, cifrada en la *Cinemática* pura, fuente de todo mecanismo, y de dar vida á la *estática*, base de construcciones y estabildades, crea casi de golpe la *dinámica*, resumen de todo lo material existente, que despierta en Galileo 18 siglos después de la *estática* de Arquímedes, y toma forma definitiva á impulso del sabio de Pisa y de tantos otros talentos, que en los siglos XVII y XVIII le imprimen impulsos gigantescos.

Con oportunidad misteriosa, muerto Kepler, cercano á la tumba Descartes y al morir Galileo ⁽¹⁾, que nos lega constituida la ley de *independencia* de movimientos, presentida quizá por Aristóteles, nace el inmortal Newton, que define la de *acción y reacción*. Con estas leyes y la que poseíamos de *Inercia*, no sé si precisada, como dice alguno, por Descartes, ⁽²⁾ tenemos los cimientos de la nueva ciencia, de

(1) Kepler murió el año 1630, Descartes en el 1650, Galileo murió el 8 de Enero de 1642 y Newton vino al mundo el día de Navidad de este mismo año. (Dictionnaire historique ou histoire abrégée &c... par une société de Gens-de-lettres.—Septième édition, 1789.)

(2) Hay algunos pasajes en Descartes, como el suponer en el alma un poder director, capaz de cambiar de cualquier modo la dirección del movimiento, sin modificar la cantidad de éste y sin crear fuerza, que indican, quizá, alguna obscuridad en su mente respecto al concepto verdadero de la ley de Inercia.

la mecánica general, puesta en acción mediante la palanca poderosa del análisis infinitesimal, por esos genios, cuyos nombres pronuncia con veneración el matemático y por otros mil no menos insignes, como los Mersenne, Roberval, Huyghens, Leibnitz, Varignon, Bernoullis, Maclaurin, Euler, Laplace, D'Alembert, Lagrange, Poincot, Poisson, Poncelet, Coriolis..... á quienes rindo con este recuerdo un pequeño tributo de mi profundo respeto.

Esa es la ciencia que entusiasma á Arquímedes hasta gritar, ante el Rey de Siracusa: «dadme un punto de apoyo fuera de la tierra y lamoveré á mi antojo.» Esa tambien la que hace exclamar á Descartes: dadme materia y movimiento y yo haré el mundo.

Esa es en fin la que A. Comte llama en su filosofía: ciencia inmensa y admirable, base necesaria de la filosofía positiva entera, testimonio irrecusable del alcance del espíritu humano. ⁽¹⁾

No hay ciencia más convencida de su poder que la mecánica; pero poder que es nulo, entiédase bien, nulo, sin la matemática, que inunda de luz todos los rincones del mundo material y comienza á invadir los del espíritu, que, sin duda, está sometido á leyes y como tales, ellas ó sus consecuencias, tendrán expresión sintética en la matemática actual ó en la *ultra-matemática* venidera.

Ninguna como ella es capaz de cifrar en fórmula más sencilla, la síntesis más grandiosa que acaso dieron los siglos:

$$\Sigma F\delta k=0$$

encerrando en sí quizá, todos los fenómenos del universo material, que en resumen habrán de ser constituidos (cuando solo impera en ellos el determinismo mecánico) por masas y fuerzas en equilibrio ó en movimiento, sea ó no efectiva la realidad de éstas, ó vaya contenida su expresión en masas y aceleraciones, que á su vez llevan implícitos el tiempo y el espacio.

Σ (sigma) es indicadora de una ó de muchas sumas, de número finito ó infinito de términos (verdaderas integrales) análogos á $F\delta k$, representantes de trabajos virtuales, en que F es el simbolo general de cada una de las fuerzas, (perfectamente definidas, segun las reglas de la mecánica) que intervengan en la cuestión y cualquiera que sea su naturaleza, incluidas las de inercia, que son productos de masas por aceleraciones, cuya dirección y sentido fijan éstas. La *va-*

(1) Je regrette vivement que les limites dans les quelles j'ai dû me renfermer, vu la destination de cet ouvrage, ne m'aient point permis de faire passer, autant que je l'aurais désiré, dans l'esprit du lecteur, mon sentiment profond de la nature de cette immense et admirable science, qui, base nécessaire de la philosophie positive toute entière, constitue d'ailleurs évidemment, en elle même, le témoignage le plus irrécusable de la portée du génie humain.

A. Comte.—Cours de philosophie positive, t. I, pág. 533.

riación de k , que hemos representado por δk es, como se sabe, una diferencial tomada en concepto indefinido, y representa aquí la proyección sobre la fuerza ó su dirección, del camino *virtual* del punto geométrico á que se considera aplicada, entendiendo por camino virtual, cualquiera de los infinitos diferenciales, que podría tomar ese punto, y para mayor sencillez y grandes simplificaciones el camino *definido*, que propenda á tomar el mismo al romperse el equilibrio ó que á partir de un instante crítico, vaya á tener en el tiempo diferencial $= (dt)$ siguiente.

De tal síntesis, incomprensible para el que es ageno á la matemática, inútil para el que no es mecánico, arrancan verdades y consecuencias asombrosas, que resuelven muchos y puede quizá decirse que plantea todos los problemas, dominados por el puro determinismo, en el universo material, y allana dificultades y acaso tiene algun porvenir en muchos de otros mundos de la inteligencia.

Esa ecuación misteriosa da todas las leyes del equilibrio y de la composición y descomposición de fuerzas, ya considerados como séses, que influyen unos sobre otros por intermedio de puntos materiales, superficies ó cuerpos reales, ya como magnitudes en general, como entidades puramente geométricas, reobrando sobre la ciencia de la extensión que la sirvió de base y devolviéndola en cambio bellezas sin cuento.

En ella está cifrado el equilibrio de todas las máquinas y la estabilidad de todas las construcciones, y empiezan á salir de su fondo los enigmas de la combinación química, con la *ley de los calores* de Berthelot y el teorema de la *necesidad de combinación*, segun las energías caloríficas que tienden á producirse, leyes y teoremas que no son en el fondo más que problemas de equilibrio ó de máximos y mínimos relativos.

Tomada en la forma que le dió D'Alembert, plantea los problemas de movimiento, formulando las ecuaciones diferenciales del mismo en cada caso, y deduciendo algunas integrales generales, algunas propiedades particulares, como la de fuerzas vivas, que á la par que rige á todas las máquinas en movimiento, abre las puertas á estudios notables sobre superficies de nivel teorías de potenciales, etcétera, llegando tambien á formular con ella la conservación de la energía total del Universo.

Hace una rama suya la Hidráulica y Pneumática, basadas antes en principios independientes, y convierte en vasallos á la Electricidad y la Termodinámica que casi campaban por su respeto.

Aquel enigma cifrado, lleva en su seno todas las propiedades de

las cantidades de movimiento y de los momentos de las mismas, dando la clave de la mecánica celeste con la deducción sencilla de algunas leyes, que tanto trabajo costaron á Kepler por el procedimiento empírico, y más aun influido por aquella preocupación de su época, á que llamó con razón el *ladrón de su tiempo*.⁽¹⁾ De ella nacen los planos máximos de áreas y el especial é invariable de Laplace, que puede patentizar si hay ó no ingerencias extrañas en nuestro sistema planetario, y de ella en fin puede sacarse la ley Newtoniana de gravitación y toda la ciencia del movimiento, como lo hiciera Lagrange en su mecánica analítica.

Lleva consigo íntimamente unidos la mecánica y por ende la matemática, triunfos positivos del orden moral, que no debemos omitir.

Uno y grande es el emancipar lentamente al hombre de todo trabajo bruto, elevándole al puesto de *director*, que le corresponde por su inteligencia, por esa chispa divina que arde en su cerebro.

La misma continuidad matemática prueba, en cierto modo, que no puede aniquilarse (aunque se disuelva, sin desaparecer, el cuerpo que le sirvió de instrumento) ese destello, que la mecánica dice ser distinto de la materia sobre que actúa, porque su actividad voluntaria, haría cambiar en cada instante la constante energía del Universo.

En cada máquina, en cada invento, en cada adelanto, quedan impresos de un modo indeleble, y á veces con letras de gigantes mecanismos, los esfuerzos combinados de tanto obrero de la inteligencia, que dejaron, integradas, poderosas energías potenciales, acumuladas por virtud especial y voluntaria de aquella chispa divina, gastándose en cambio parte de sus energías corporales; que no hay trabajo material que se cumpla, sin trabajo material que se gaste, como demuestra tambien la fórmula sintética citada.

¡Quién sabe si (á la manera que sencillas y toscas máquinas sirven de base á otras más perfeccionadas) con el auxilio de una mecánica especial del espíritu, que acaso está cercana, demostrarán nuestros sucesores que los axiomas, las verdades evidentes para un ser, no son más que integrales formadas por la actividad de todos sus predecesores! ¡Si los más complicados teoremas de hoy serán, por integraciones análogas, los axiomas de mañana!

Dejemos estas honduras de que me sería difícil salir airoso, y voy á salvar tan rápidamente como pueda, otras en que el matemático, el

(1) Aun duraba en la época de Kepler la notable preocupación á que llamó este astrónomo «gran ladrón de su tiempo» de que, cada planeta era el asiento de un principio inteligente, y de la incorruptibilidad de los cuerpos celestes, que hizo adoptar la consecuencia aristotélica de las órbitas circulares como más perfectas.

mecánico tiene que acudir en socorro del filósofo, siquiera sea, como dice Mr. Paul Janet, para quitarle los obstáculos que la misma matemática ó la mecánica puedan presentarle. (1)

Cuando, por conjunción de privilegiados espíritus, la matemática y con ella la mecánica, dió aquel paso gigante en el siglo XVII, Leibnitz, queriendo compaginar las irresistibles consecuencias de la dinámica naciente, con sus ideas religiosas, con la libertad moral, y no conforme con las explicaciones de Descartes, ideó aquella *armonía preestablecida*, aquel autómatas cuerpo, que debía ejecutar movimientos perfectamente acordes con los mandatos del alma, no por dependencia de ésta, sido en virtud de la previsión sapientísima del Supremo Hacedor de uno y otra. (2) De tal modo habría de funcionar ese conjunto, que si llegó en el alma el tétrico momento de ordenar un crimen ó el glorioso de dar cima á un hecho heroico, el cuerpo, sin enlace directo con ella, y solo por esa fatal armonía preestablecida, ejecutaría los terribles movimientos precisos para consumir aquél ó los conmovedores para llevar á cabo éste.

Mr. Boussinesq, el sabio profesor de la facultad de ciencias de la universidad de Lille, más conocedor quizá, de la mecánica y de las matemáticas, que el mismo Leibnitz, imagina una explicación profunda, que ataca en sus últimas trincheras al materialismo, conciliando por medio de las teorías modernas y de un modo admirable, el determinismo mecánico con la libertad moral. (3)

Si el estudio y las observaciones y la crítica severa le aseguran ¡hé aquí un nuevo triunfo de que el metafísico será deudor al matemático! Planteemos el problema.

Cuando se tiene un punto material (ó un conjunto de ellos, for-

(1) Rapport de M. P. Janet à l'Académie des sciences morales et politiques sur un mémoire de Mr. Boussinesq.—Este notable escrito del conocido filósofo, encabeza la obra ya citada «Conciliation du véritable etc.» y fué publicado también en las «Comptes rendus» de dicha Academia, número de Mayo de 1878.

(2) «... quod jam tunc in decretis divinis habebat, ex quo Deus harmoniam inter eas futuram præordinavit. Prorsus sicut automatum istud, quod famuli vicem subiret, a me non deberet idealiter, virtute scientie. Illius, qui mandata mea futura prævidens, ad præstanda mihi toto die officia id adtemperasset. Cognito futurarum mearum voluntatum movisset summum hunc Artificem ad formandum dein automatum: meus in illud influxus esset objectivus, illius vero physicus: scilicet in quantum anima perfectionis aliquid et cogitationes distinctas habet, Deus animæ corpus aptavit effectique per anticipationem ut corpus ad exsequenda animæ jussa moveretur, etc.—Leibnitii opera (Genevæ (1768). T. I (Teodicea) pag. 166.

(3) En lo que sigue se hace un ligerísimo resumen de la interesante obra del profesor nombrado y ya citado dos veces anteriormente: «Conciliation du véritable déterminisme mécanique etc.» que con sus notas tiene más de 250 páginas de impresión. No podemos hacer otra cosa que tocar el asunto en este escrito. Hay algunas objeciones hechas por el P. Carbonelle y otros. La cuestión es muy interesante y puede su discusión hacer dar un paso á las ciencias psico-físicas.

mando lo que se llama un *sistema*) de posición y velocidad conocidas en un instante dado, de masa determinada, y sometido á fuerzas ó acciones perfectamente definidas en cada instante, puede la mecánica escribir las ecuaciones diferenciales de su movimiento. Sépanse ó no integrar éstas, las integrales existen, y en estas ecuaciones finitas estarán implícita ó explícitamente, la trayectoria y la ley del movimiento, es decir: donde se mueve y como se mueve; ó bien queda escrito de un modo fatal qué línea recorrerá cada punto, y cuál será sobre la misma su situación precisa y su velocidad en un instante cualquiera.

Las ecuaciones diferenciales para un punto ó sistemas de puntos (cuerpos) abandonados á sus acciones mútuas, son en resumen las leyes á las cuales obedece la materia bruta. Esas ecuaciones no son sino *derivadas*, propensiones á variar con relación al tiempo de cada una de las cantidades de que depende el estado de un punto ó de un sistema, y tales *propensiones* son funciones perfectamente determinadas de los valores actuales de esas mismas cantidades.

Ley es ésta, como dice Boussinesq, que representa el coronamiento natural de las conquistas científicas de tres siglos de estudios perseverantes. ⁽¹⁾

Los átomos y moléculas que constituyen el mundo orgánico y el inorgánico son puntos y cuerpos materiales, sometidos á sus acciones mútuas en el sistema total del Universo, y sus circunstancias de movimiento definidas han de ser en cada instante, aunque no las conozcamos. Su modo de ser actual será pues, consecuencia matemática del anterior y á la vez causa, antecedente preciso del que será. El que como el Ser Supremo, conozca la ley precisa de sus acciones mútuas, puede leer en cada punto material de circunstancias actuales conocidas, toda su historia desde el infinito negativo al positivo de los tiempos. Forman sus posiciones una cadena, de que no hay sino seguir con la velocidad, que en cada uno corresponda, sus infinitos eslabones. No parece sino que la fatalidad más absoluta empuja á cada punto material y rige todos sus modos de ser en el tiempo y el espacio.

Si esto es cierto, todos nuestros movimientos son resultantes de ese determinismo fatal, no los que ordena nuestra voluntad, y entonces ¿qué es de nuestro libre albedrío, base de responsabilidades, cimiento de leyes, fundamento de sociedades..... enlace de nuestra vida con ese más allá que aparece en lontananza?

El materialismo más absoluto puede arraigar en la mente del que

(1) Obra citada, pág. 57.

vé convertido en ilusión engañosa eso que *piensa*, que *siente*, que *quiere* y que no traspasa la tumba.

A Descartes primero y á Leibnitz despues, filósofos y mecánicos ambos, hubo de asaltarles ese árduo problema, que juzgó resuelto el primero, pensando que algo, como reflejo de Dios, hay invariable en el Universo y ese algo es para él la suma total de las cantidades de movimiento; es el Σmv , que corresponde en cada instante, á todo lo material existente. Bastóle pues suponer en el alma un poder director, capaz tan solo de cambiar la dirección del movimiento, dejando siempre constante aquella suma, y entonces, el sér que puede escoger libremente movimientos y apropiarse el que convenga, responsable resulta de todas sus acciones voluntarias.

Pero desde Huyghens quedó establecido el notable teorema de fuerzas vivas, y esclarecidas las ideas sobre trabajos, equivalentes de aquéllas y proporcionales, como es sabido al cuadrado de las velocidades y Leibnitz, su contemporáneo estaba en posesión de este corolario (cualquiera que fuese entonces la expresión que se le diera): en un sistema aislado en que no actúan fuerzas exteriores y por tanto en el sistema íntegro del Universo, en que está la materia sometida solo á sus acciones mútuas "*la suma total de sus energías materiales es una constante ó como se proclama hoy por todas partes: la energía total del Universo es constante.*" (1)

Aun era oscura en el comienzo del pasado siglo lo que llamaban "fuerza de un cuerpo en movimiento," y no se había deslindado con claridad el verdadero valor mecánico de las *cantidades de movimiento* y las *fuerzas vivas*, entre los productos mv y mv^2 , como lo prueba la notable contienda, de más de 30 años, entre Cartesianos y Leibnitzianos, (2) terminada al fin por D' Alembert, dando la razón á todos, según el punto de vista desde el cual la cuestión se contemplara; pero el claro talento de Leibnitz penetró con mucha anticipación, lo que no tenía sino por una ley de la naturaleza: "que hay siempre una perfecta igualdad entre la causa *plena* y el efecto *entero*," (*..... qu' il ya toujours une parfaite équation entre la cause pleine et l' effet*

(1) Ese total se compone de dos sumandos, uno de energía actual encerrada en las fuerzas vivas que tengan en el momento considerado las masas y otro la energía potencial ó de posición que será una función de todas las distancias; así pues la fórmula será

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 + \varphi(r, r', r'', \dots) = \text{Constante.}$$

(2) Puede verse á propósito de esta lucha el diálogo de Vincenzo Riccati della compagnia de Jesu—dove al Congresso di piu giornato delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tiene discorso.—Bologna.—1749.

entier) ⁽¹⁾, y no podía por lo tanto quedar satisfecho con las explicaciones de la libertad dadas por Descartes.

Y en efecto, si el alma actuase sobre un punto material, siquiera fuese para cambiar la dirección del movimiento, habría un trabajo, una energía creada, distinta de la energía actual, del $\frac{1}{2}mv^2$ que el punto material ya lleva. La suma total de energías materiales, cambiaría cada vez que un poder director, consciente ó no, entrara en ejercicio.

Para evitar contradicciones y ponerse de acuerdo con la ciencia, ideó Leibnitz aquella "armonía preestablecida", á la que, como él mismo dice, quizás hubiera tenido que acogerse Descartes, si viviera.

Además por la ley de Newton, es evidente que si un punto material recibe una acción y toma un movimiento determinado, es precisamente porque un segundo punto recibe de aquél otra acción idéntica de sentido inverso, una reacción que origina en él un movimiento opuesto. Si el alma accionó, ó el punto accionado no se mueve, resultando nulo el poder de aquélla, ó se mueve en ella, en sentido inverso, algo, que debe estar muy cercano de ser materia.

Los grandes talentos, la mayoría de los sabios más prácticos en las diversas ciencias, de acuerdo con el mismo sentido comun, dictan: que no pueden explicarse con la materia sola y con las leyes físico-químicas y mecánicas, todos los fenómenos de la materia organizada. Humboldt, Berzelius, C. Bernad, Berthelot.... están conformes en que las fuerzas físico-químicas actúan, sin romper sus leyes, lo mismo en los cuerpos inorgánicos que en los orgánicos; pero, á la vez, se ven forzados á concluir también, otra especial directiva, que les dá forma.

¿Será posible, que una *entidad* tal pueda actuar sobre la materia sin ejercer esfuerzo alguno, grande ni pequeño, estática ó dinámicamente medible?

Cierto que á el alma pudiera bastarle uno pequeñísimo, tan pequeño como se quisiera, para producir los movimientos voluntarios, sin más que manejar ese misterioso teclado de células grises y enlaces de sustancia blanca, que forman el complicado tejido cerebral, y ser por su libre albedrío, la causa determinante de un movimiento que empezando casi en cero, puede acrecentarse lo que sea necesario, sin sacar algo de la nada, si nó por gastos sucesivos y crecientes de energías potenciales, energías de posición, parecidas á las de las sustancias explosivas, convenientemente repartidas y encerradas en

(1) Leibnitz opera omnia. Tomo tercero, opera matemática, página 197.—Réplique de Mr. Leibnitz á Mr. L' Abbé Conti (q. Enero 1697).

nuestro organismo; cierto que podría llegarse á producir así una corriente nerviosa, capaz de inflamar el cebo celular, si se permite el simil, en que termine el filete nervioso centrífugo portador de la orden emanada de la voluntad, y hacer explotar el músculo que traduce aquel mandato; pero esa solución, que es la de Cournot y la de Saint-Venant, que atribuye á el alma una especie de poder *disparador* (décrochant), sentada también por nuestro eminente Echegaray, y que será quizá, la de la mayor parte de los que se apoderan con alguna profundidad de los conceptos metafísicos, matemáticos y mecánicos, no puede, á los mismos que la exponen, satisfacerles por completo.

Si es cero aquel esfuerzo, *de la nada..... nada sale*.

Si es algo, siquiera sea tan pequeño como la diferencia existente entre una fracción decimal 0.3333..... y su generatriz $= \frac{1}{3}$ correspondiente, se integrará por los infinitos instantes, de infinitos seres, de mundos infinitos, y alterará continuamente la energía total. Es además magnífico asidero de la teoría sensualista, que solo habrían menester, en todo, del pequeñísimo esfuerzo producido, en las misteriosas regiones cerebrales, por los nervios centrípetos portadores de sensaciones, recayendo así en un verdadero determinismo.

Basta ya de reflexiones que nos llevarían muy lejos y veamos el dilema que de lo expuesto se desprende.

O nos acogemos á la insostenible armonía preestablecida de Leibnitz, y entonces podemos decir con el poeta: «ó sobra la materia ó sobra el alma», porque en efecto suprimid ésta y toda la historia del mundo sería la misma, ejecutada en un sonambulismo universal, como diría Mr. Janet, (pasamos por alto otras teorías ideales, como la de los fenómenos y noumenos de Kant, que enlacen, de algun modo, movimientos materiales y voliciones del alma), ó venimos á parar al determinismo mecánico con sus consecuencias de pura *fatalidad*, porque las ecuaciones diferenciales del movimiento no dejen lugar á duda sobre trayectorias de puntos y sistemas, con sus situaciones precisas en cada instante y todo cuando atañe á circunstancias del movimiento. ⁽¹⁾

Suponemos que se pueden escribir las tres ecuaciones diferenciales del movimiento para un punto de masa m , dependiendo su aceleración, de su situación en el sistema.

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= f(x, y, z) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= f_1(x, y, z) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

Pudiendo integrar dos veces y ejecutar todas las transformaciones que sean precisas, es indudable que podremos también escribir las seis siguientes en que entran, seis constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, que serán conocidas en el momento que se nos den la velocidad y posición del punto en un instante cualquiera, pues sustituidas estas circunstancias en las ecuaciones, no habrá en ellas más incógnitas que aquellas constantes.

Velocidades, proyección	$\left\{ \begin{aligned} Vx &= \frac{dx}{dt} = \varphi_1(t, x, \delta, \gamma, \dots) \\ Vy &= \frac{dy}{dt} = \varphi_2(t, x, \delta, \gamma, \dots) \\ Vz &= \frac{dz}{dt} = \varphi_3(t, x, \delta, \gamma) \end{aligned} \right.$	Leyes del movimiento proyección, ecuaciones fin- tas del movimiento	$\left\{ \begin{aligned} x &= F_1(t, x, \delta, \gamma, \dots) \\ y &= F_2(t, x, \delta, \gamma, \dots) \\ z &= F_3(t, x, \delta, \gamma, \dots) \end{aligned} \right.$	Estas darán evidentemente la trayectoria por eliminación de t ; la posición precisa del punto en cada instante; y con las anteriores, todo cuanto se refiere á velocidades. Por tanto ninguna ambigüedad parece quedar en el movimiento de un punto, conocidas sus circunstancias iniciales, ó otras de un instante dado.
-------------------------	---	---	---	---

Ya está el problema planteado, veamos si hay solución.

Ni aquellas armonías, un tiempo precisas, hoy quizá pueriles, ni este *fatal* determinismo. Mr. Boussinesq, guiado sin duda por observaciones de sabios anteriores, da una solución notable y profunda que, á nuestro modo, vamos á explicar.

Consideremos un caso sencillo: una ecuación diferencial de primer orden, $f(x, t, dx, dt) = 0$, entre dos variables: una coordenada x de un punto que se mueve y el tiempo t , que podemos tomar por variable independiente.

Sabe perfectamente el matemático, que á tal ecuación diferencial, corresponde otra integral general: $F(x, t, C) = 0$, dentro de la cual están contenidas muchas integrales particulares, que resultarán de dar valores á la constante arbitraria C .

Esta sin embargo queda precisada en cada problema, por las condiciones especiales embebidas en la misma cuestión. En el caso presente esas condiciones son circunstancias iniciales del movimiento, es decir: el valor $x = a$, que tenga el móvil para un valor de t , para $t = 0$, porejemplo: Sustituídos ambos en la integral general, harán conocer C .

Sabe también, que puede haber en este sencillo caso, una integral única, especial, una *solución singular* $\varphi(x, t) = 0$, en que no existe constante, ni proviene de dar á ésta un valor particular en la integral general; es una función distinta y que sin embargo resuelve también el problema, satisface á la ecuación diferencial.

Tomemos el problema en sentido inverso, para darnos mejor á entender, aunque caminemos dentro de casos menos generales.

Si tenemos una función primitiva $F(x, t, C) = 0$ y su ecuación diferencial es $f(x, t, dx, dt) = 0$, esta misma diferencial corresponde ó es satisfecha por otra primitiva $\varphi(x, t)$, que proviene de eliminar la constante C entre aquélla y su derivada $\left(\frac{dF}{dC} = 0\right)$, con relación á la constante. (1)

(1) Se ocurrirá desde luego al lector que podrá entrar C en su primera potencia y desaparecer en la diferenciación; por eso decimos que ponemos casos particulares para darnos á enten-

Este, como es sabido, es el procedimiento del cálculo diferencial, para hallar, (cuando es posible de este modo) la *envolvente* de todas las primitivas, $F(x, t, C) = 0$, $F(x, t, C') = 0$, $F(x, t, C'') = 0$, que solo se diferencian unas de otras por el valor de la constante C , que suponemos varía de una manera continua.

En el caso particular que consideramos, la *envolvente* es una curva plana, tangente á todas las posiciones de la primitiva ó *envuelta*, que tambien es otra curva contenida en el mismo plano. Si se nos diera la ecuación diferencial de esta última, es evidente que su primitiva ó integral será, mientras no se fije la constante, cualquiera de las posiciones de la *envuelta*; pero esa misma ecuación diferencial tiene por *primitiva singular* aquella envolvente, que refunde, en cierto modo, todas las integrales particulares, las cuales en un problema de movimiento provienen del cambio de las circunstancias iniciales, que son, como dijimos, las que influyen en el valor de la constante.

Se comprende bien que esta teoría, aunque complicándose proporcionalmente, será aplicable á funciones de dos ó más variables y de órdenes superiores de diferenciación, resultando siempre las integrales singulares, cuando existen, con menos constantes que la integral general, que satisfaga á la cuestión.

Tambien se comprende que aunque se llamen *envolventes*, no siempre envuelven, ni es condición precisa que envuelvan, sino que sea tangente á todas las posiciones de su envuelta en el caso de una curva plana de que hemos partido.

A veces la solución singular se reduce á un punto, que en las cuestiones de movimiento suele ser uno especial á donde el móvil llega con velocidad nula.

Mientras se trata de un problema cualquiera no causan tanta sorpresa las soluciones singulares, como cuando se hallan al integrar ecuaciones diferenciales del movimiento, porque parece que éste debe resultar siempre determinado, sin ambigüedades de ninguna especie.

El notable matemático Mr. Poisson tropezó con una sola ecuación diferencial en un problema de movimiento, en que, según las circunstancias iniciales, puede resultar una *solución singular*, que conceptuó como una verdadera paradoja, digna, como él dice, de ejercitar la sagacidad de los geómetras ⁽¹⁾ No encuentra otra explicación plausible

der, pero no es difícil ver que, en ese caso $\frac{d^2x}{dx^2}$ y $\frac{dC}{dt}$ deben resultar $= \infty$, y con estas condiciones se pueden indagar las soluciones singulares.

(1) La ecuación á que se refiere Poisson es ésta: $\frac{d^2x}{dt^2} = ax^a$ en la que resulta como

sino creer, que las fuerzas naturales deben tener forma incompatible con esas soluciones.

Sigue Cournot pensando en ella sin resolverla, é insiste Duhamel en que deben despreciarse tales soluciones en los problemas de Dinámica, y viene Boussinesq á cimentar precisamente sobre las mismas, la conciliación del *determinismo* mecánico con la existencia de la vida y la libertad moral.

Acude en este momento á nuestra mente un dicho de Pascal: antes se cansará la imaginación de concebir, que la naturaleza de suministrar, y en efecto, por mucho que discurramos por campos imaginarios, jamás podremos agotar las maravillas que encierra la naturaleza. Es cierto que las verdades puras del alma, como las de la matemática, que forman el alimento más preciado del espíritu, no precisan tener una realidad objetiva á que aplicarlas; pero también es cierto que dice la práctica de muchos siglos, que toda verdad encerrada en una fórmula de aquella ciencia, se vé pronto ó tarde realizada en algún fenómeno de la naturaleza.

Ha llegado pues el momento de dar explicación á la paradoja citada, y de que vea el hombre hasta en el mundo moral, aplicaciones prácticas de aquellas soluciones singulares, campo de la indeterminación mecánica, todavía inexplorado.

Si en esos puntos en que se tocan, en que confluyen, se juntan ó se detienen y forman bifurcaciones especiales las soluciones particulares y la *singular*, el móvil puede seguir esas distintas trayectorias, sin faltar á las leyes naturales, sin que cambien las energías totales del universo, satisfaciendo á las ecuaciones diferenciales, cumpliéndose en fin todas las condiciones del problema, ¿quién resolverá en la materia inerte esa especie de perplejidad? Habremos de abandonarnos al caprichoso azar, á la casualidad pura; habremos de esperar esfuerzos fortuitos y extraños, cuando las fuerzas que intervienen en la cuestión no basten para hacer perfectamente determinado el problema?

¿No podría entonces sin gasto material, sin esfuerzo físico medible, un principio director, un poder supra-físico, ejercer su acción misteriosa y decidir en el sér libre, con solo su querer, el camino que el móvil habría de tomar?

como solución singular un punto de detención en el origen para $V_0 = 0$; pero según demuestra Boussinesq, pueden existir multitud de casos en que se presenten esas soluciones singulares, como en el movimiento de un punto material pesado sobre una curva (sin rozamiento); en el de uno que se mueva sobre una recta sometido á atracciones ó repulsiones de puntos fijos simétricos y de igual intensidad, dos á dos, respecto á esa trayectoria; en el movimiento de dos puntos sometidos á su acción mútua etc., etc.

Mr. Boussinesq contesta afirmativamente, y empieza á surgir una lucha, una discusión científica, que no dejará de dar ópimos frutos por ser el asunto de trascendencia suma. Algunos, y entre ellos el Padre Carbonnelle presentan objeciones ⁽¹⁾ á que responde aquél en otro escrito, pero nos parece que el profesor de Lille es el único que con su opinión compagina extremos incompatibles antes, deja incólume la libertad, y hace científicas las condiciones precisas de su existencia y de la vida, y está de acuerdo en muchos puntos con lo que presenta la experiencia.

En efecto, si ese poder por virtud de su voluntad en los seres racionales es capaz de dirigir los átomos de las regiones convenientes cerebrales donde quizá reinan más la inestabilidad de combinación y las circunstancias de indeterminación, y de anular ésta haciendo que el móvil siga la *solución singular* ó la *particular*, que convenga en el momento y punto preciso en que las bifurcaciones se presentan, tendremos resuelta la cuestión en contra del determinismo, en favor de la libertad moral, sin alteración de las leyes que rigen la materia y arrojando al materialismo de sus últimas trincheras.

Hay en el Universo dos clases de fenómenos de movimiento: unos, y parecen los más, que no se prestan á soluciones singulares, y basta en ellos el determinismo mecánico para conocerlos por completo, otros en que existiendo tales soluciones, precisa un principio suprafísico, inmedible estáticamente por fenómenos de equilibrio, ni dinámicamente por aceleraciones. Los primeros son fenómenos del mundo *inorgánico*, inanimado, los segundos corresponderán al *orgánico* al animado.

Analizando los problemas mecánicos, se encuentra, en los casos sencillos que podemos resolver, la posibilidad de tales soluciones singulares, y se conciben en los conjuntos materiales complicados, variantes infinitas, que darán lugar á ellas en combinaciones que no podemos penetrar, siendo propicias las circunstancias iniciales de cada caso.

Los modos de ser iniciales serán quizá las condiciones materiales de vida, las *condiciones vitales*, y la vida existirá allí donde un poder director presida esos movimientos para encaminarlos á creaciones morfológicas, que rudimentarias en los casos elementales y persistentes, como por herencia, podrán ser la base de formas cada vez más complicadas, compuestas quizá de esas mismas elementales, porque como decía Leibnitz, cada ser vivo está compuesto de infinitud de

(1) Revue des questions scientifiques (Bruxelles, 1879).

séres vivos, ó como dijo Perrier: los organismos superiores son todos el resultado de la asociación de un numero variable de organismos más sencillos. ¡No parece sino que esos organismos elementales son una combinación especial de la materia con el principio ó elemento suprafísico!

¿Qué enlace habrá, qué serie reunirá ese poder elemental, con el que constituye nuestro espíritu? ¡Quién lo sabe! ¡si estamos viendo y tocando los organismos elementales y los superiores y la inmensa cadena que con ellos forma naturaleza y aun no sabemos como se enlazan esos eslabones!

Hace tiempo que pensamos en la existencia de otra mecánica más elevada que la correspondiente á la materia, Mr. Boussinesq viene á corroborar nuestra idea diciendo, que estas cuestiones abren la puerta á otra *mecánica superior*, tomando en cuenta el principio director, y que tal ciencia servirá de intermedio entre la mecánica material y la social. Quizá sus fórmulas serán la expresión de leyes concernientes á la producción de formas orgánicas, y aunque no lo veamos inminente, no nos parece imposible que pueda alguna vez resolverse este problema, que indica aquél profesor; dada la configuración actual de un sistema orgánico en que puedan definirse perfectamente sus condiciones físico-químicas, hallar el verdadero camino seguido en cada bifurcación de las integrales de movimiento.

Más tarde llegará la que podremos llamar *psicodinámica* y conoceremos quizá las leyes del espíritu, aunque nunca pueda someterse á fórmulas la voluntad.

Esta impotencia, tomada como defecto, la arroja alguna vez el metafísico al rostro del matemático, pero el defecto, si acaso existe, estará en aquél, que pretende penetrarla, no en éste que confiesa, en todo lo que no comprende, su ignorancia, porque solo vive de evidencias mediatas ó inmediatas. Ideas vagas, explicaciones confusas, opiniones contradictorias reinan en ese y otros mil conceptos en la ciencia metafísica, definida por Voltaire: "campo de la duda y novela del alma."

Aparte de todo, si en los fenómenos del espíritu ha de haber funciones matemáticas, preciso será también que haya alguna variable independiente. Tomad, pues, como tal la voluntad y cuando por ella misma, ó por influencias morales, quede trazado el derrotero que aquella debe seguir y se conozcan bien las leyes del espíritu, es muy probable, que la matemática hará la mayor parte del resto.

Libres y por tanto responsables, pero entre límites, somos, quizá, menos autónomos de lo que nos figuramos. No hay razón para que las series generales del Universo, se detengan bruscamente en un

punto determinado, es acaso, una ilusión de la ignorancia y de la soberbia humanas, juzgar al hombre rey de la creación, cúspide intelectual, libérrimo absoluto.

¡Quién sabe, si guiados por hilos invisibles, queda muy poco que hacer á nuestro pobre albedrío!

No tendrá razón Spinoza cuando sienta que "creernos libres es soñar con los ojos abiertos"; no estará en lo cierto Leibnitz llamando á el alma "autómata espiritual"; quizás exagera Malabranche asegurando que "el hombre no actúa, sino que es actuado"; pero la mayor parte de los filósofos andan conformes en que "sub *lego* libertas," nuestra libertad, sometida á ley, es una libertad relativa.

Sin embargo, un átomo que nos quede de libertad, ese átomo se traducirá en mérito ó demérito y en función del tiempo podrá integrarse, aunque para definir por completo la integral, necesitemos quizá asignarla por límites cero é infinito.

Restringida y todo la libertad hasta ese punto, puede ser, y lo es, base de infinitos fenómenos y grandes transformaciones en el conjunto universal, á la manera que esas pequeñísimas oscilaciones, que concede el físico al átomo, á los centros de fuerza ó á la entidad misteriosa, invisible pero efectiva, que constituye los cuerpos materiales, es base de energías capaces de cambiar lentamente la faz del Universo.

Dejemos ya estos campos imaginarios y virtuales aplicaciones de la matemática y á fin de pasar resueltamente al epílogo de nuestro discurso, permitidme antes unas pocas consideraciones en que de un modo especial están revueltas la matemática y la filosofía.

En la función total de la creación, en que todo está arreglado en peso, número y medida ¿habrá posibilidad de más variable independiente *absoluta* que la *voluntad suprema*?..... ¿Las voluntades relativas van de cero á infinito sin tocar nunca esos límites ó tienen otros límites distintos? ¿Son independientes solo entre los que les consienten variables superiores? ¿habrá una función de todas ellas una sustancia que de todas dependa?

Si la voluntad absoluta, infinita, del unico Ser que es, como tal no es *variable*, la creación toda ¿no será un conjunto, aunque incomprendible para nosotros, perfectamente definido? ¿Cuál será el nudo de enlace del Universo material y el moral ó no existe y resultan dos creaciones paralelas, independientes? ¿Serán sus magnitudes fijas ó podrán crecer como las ondulaciones de un modo indefinido? ¿La voluntad propia de cada esfera, puede hacer que esta mengüe ó quede invariable, ó solo crecer sin medida?

En resumen: La matemática es hoy la ciencia mejor constituida, por su exactitud al definir, por su infalibilidad al probar, por su caudal de verdades necesarias, universales permanentes. Es el lazo de unión entre las ciencias puramente objetivas y las subjetivas y otro sentido especial que armoniza los externos y el íntimo, teniendo la ventaja de ambos y aminorando sus inconvenientes; porque los sentidos externos son toscos y muy falaces fuera de ciertas realidades perfectamente manifiestas, y el Yo es también, por sí solo, una piedra de toque variable de un individuo á otro (y aun dentro de uno mismo, según las circunstancias), sacándole de ciertas esferas muy restringidas.

La matemática tiene una ingerencia necesaria en todas las demás ciencias, ya en forma de sencilla lógica, ya funcionando figurada ó cifrada y constituyendo una continuación de aquella como lógica superior.

Sin ella el hombre estaría hoy en un lamentable atraso material y moral. El espíritu es sin duda de mayor importancia que la materia, que, áor ahora, cae, más directamente bajo el dominio de la ciencia exacta, pero la ciencia del espíritu, por alto que sea su objeto, y por mucho que se preconice, es preciso confesar que está aún sin hacer. Ciencia que no puede prever y predecir de un modo fijo, salvando tiempos y espacios, ciencia que con sus principios y verdades se presta á consecuencias perfectamente antitéticas, ó está sin constituir ó muy cerca de no ser lo que pretende.

Si Lavoisier pesando compuestos dejó sentada la conservación de la materia y Mayer con su principio de equivalencia, hizo ver que en lo invisible y para conservarse, continúa el movimiento, nadie mas que la mecánica poniendo á su servicio la matemática, puede penetrar en la conservación total de la energía, y poner de manifiesto las maravillas sin cuento del universo material y allanar muchas dificultades, que las mismas ciencias positivas pudieran presentar en las elevadas regiones del Universo moral.

Aunque el procedimiento inductivo tenga, en cierto modo, aplicación en la ciencia matemática, su método esencial es el deductivo, único que partiendo de bases firmes es capaz de poner al descubierto las verdades, levantando con segura mano los pliegues de la naturaleza que las ocultan y aunque se opongan á ello fuertes voluntades.

Ese método sería absurdo para las ciencias que no tienen puntos fijos en que apoyar sus consecuencias, y aún teniéndolos será inútil ó poco fecundo, si los medios ó enlaces con que se pretende sacar de ellos otras verdades, son caprichosos, ficticios ó nulos.

Cada ciencia necesita un método especial adecuado á su objeto, no hay duda, pero es evidente que, como dice Bourdeau (1), tiene la inducción temeridades, la percepción desprecios, la concepción lagunas, la observación errores, la opinión disidencias, la experiencia extravíos.

Solo la deducción arrancando de bases inquebrantables y siguiendo el procedimiento matemático, eminentemente lógico, es capaz de llegar directamente á infalibles consecuencias.

Merecedora es pues esa ciencia deductiva del glorioso título de exacta, cuyo concepto confunden, á veces, lastimosamente sus detractores.

Digna de respeto es, más que otra alguna, esa ciencia, llave del aula de Platon, base de conocimientos desde remota antigüedad; ciencia que adivina y predice, ciencia que está en el fondo de todo lo verdadero y por tanto de todo lo bueno y todo lo bello, ciencia que todo lo ennoblece, que enlaza lo finito con lo infinito, que es la clave de miles de secretos y enigmas del Universo, ciencia en fin, que abre al hombre comunicaciones directas con lo absoluto, porque como dice nuestro sabio Echegaray (2) "si lo absoluto existe y algunos de sus divinos reflejos llegan á nosotros, entre ellos están los que con sus maravillosas combinaciones inundan de luz los espacios ideales del álgebra y la geometría."



VARIEDADES

POJECIA I METODY MATEMATYKY NAPISAL S. DICKSTEIN WARSZAWA 1891.—*Conceptos y métodos de la matemática*.—El primer tomo de esta obra, publicado por el matemático polaco Sr. Dickstein ofrece un nuevo testimonio de la importancia que van adquiriendo dentro del plan de la ciencia matemática teorías hasta hace poco relegadas á los dominios superiores, donde solo era permitido llegar á muy contado número de espíritus investigadores. Dicha obra, destinada á una exposición general de todos los métodos modernos, es notable también por las interesantes notas en que, además de aclaraciones del texto se dan noticias de las obras que han promovido el desenvolvimiento de cada teoría.

(1) *Théorie des sciences*.... T. I, pág. 382.

(2) *Teorías modernas de la Física*, 2.ª serie.

Hoy estas teorías abstractas se van haciendo accesibles á la generalidad de los que se dedican á los estudios matemáticos, gracias á los continuados esfuerzos de algunos profesores que han hecho descender tan elevados conceptos hasta las regiones de la enseñanza, facilitando su comprensión. Uno de los primeros que siguieron esta nueva dirección fué el profesor de la facultad de ciencias de Burdeos M. Hoüel con su obra *Théorie des quantités complexes*, quien insistió en otras de sus obras sobre este punto.

Actualmente el ilustrado profesor de la Universidad de Turin señor Peano, que, en su *Rivista de Matematica* publica artículos sobre cuanto concierne á la teoría general de las operaciones, ha publicado una obrita, titulada *Arithmetices principia nova methodo exposita* y en otra titulada *Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles* funda sus desenvolvimientos en el nuevo simbolismo y modo de razonamiento, característico del Algebra de la lógica.

El Sr. Dickstein en sus obras expone los modernos desarrollos del análisis siguiendo, las doctrinas de los matemáticos más ilustres de nuestros tiempos.

Comienza la exposición de la teoría de los números examinando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva, haciendo referencias á los trabajos de Kronecker, Wronski y Cantor.

Expone despues las teorías del cálculo de Grassmann y Hankel, y después la de Dedekind, haciendo indicaciones interesantes sobre las obras recientes de los Sres Schröder ⁽¹⁾ y Betazzi ⁽²⁾ y acerca de la teoría del Sr. Weierstrass de las cantidades complejas.

Sigue el proceso gradual de la teoría de las cantidades negativas donde expone razonamientos y conceptos sobre esta cuestión de D'Alembert, Carnot, Kronecker, Wronski, Duhamel, etc.

La teoría de las cantidades imaginarias considerada desde las fórmulas con que Euler expresó el seno y el coseno por medio de exponenciales imaginarias, y los *ideales* de Wronski, se eleva en el artículo siguiente hasta la teoría de Weierstrass ⁽³⁾ y su notable concepción de los *divisores de cero*. Continúa con la teoría de Grassmann hasta llegar á la de los cuaternios de Hamilton.

La última parte del tomo publicado está destinada á los métodos de eliminación, exponiéndose los de Sylvester y Euler, así como la

(1) *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*.

(2) *Teoria delle grandezze*.

(3) La tesis presentada por M. Borel á la Facultad de Ciencias de París *Théorie des quantités complexes à n unités principales* (1886) expone con notable claridad los fundamentos de los métodos de los Sres. Dedekind y Weierstrass.

teoría de las funciones simétricas, teniendo presente los resultados de Meyer-Hirsch, Cayley, Faa de Bruno, etc.

También en esta parte se trata de algunos resultados debidos á Wronski, dándose á conocer además del jacobiano y del hessiano, el wronskiano. (4)

BIBLIOTHECA MATHEMATICA. JOURNAL D' HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PUBLIÉ PAR G. ENESTRÖM.—El inmenso caudal formado por los descubrimientos incesantes, por los vastos desarrollos que van adquiriendo todas las teorías matemáticas durante el siglo actual, ha dado importancia creciente á los trabajos bibliográficos é históricos, hasta el punto de promover el congreso internacional de 1889, de cuyas decisiones se dió cuenta á los lectores de EL PROGRESO MATEMÁTICO.

Los periódicos como el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* dirigido por el profesor Dr. Lampe de Berlin y la *Bibliotheca mathematica* del Sr. Eneström, están destinados por su índole especial á realizar estos importantes fines. Las materias contenidas en los dos primeros números de la *Bibliotheca mathematica* son las siguientes: *Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati* di Gino Loria. *Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas* por Bierens de Haan. *Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica* cenno di Antonio Favaro. *The teaching and history of mathematics in the United States*. Gumersindo Vicuña por G. Eneström. *Newton's classification of cubic curves* by W. W. Rouse Ball. etc.

Ocupándose el Sr. Halsted de la enseñanza de la historia de la matemática en la universidad de Texas, manifiesta el gran desarrollo que en ella se dan á la cuestión del hiper-espacio y de la geometría no euclídea (1) y añade: "En conexión con los cuaternios de Hamilton y el *Ausdehnungslehre* de Grassmann la atención se dirige especialmente al Álgebra de la lógica, particularmente las de Boole, Macfarlane y Schröder. Este espléndido asunto cuyo origen y desarrollo es inglés, parece destinado á dar el lenguaje científico del mundo.

El Sr. Eneström, ocupándose de la obra *The number system of algebra* de Mr. H. B. Fine, observa que hoy las investigaciones científicas en el dominio de las matemáticas se hallan precedidas frecuentemente por una introducción histórica relativa á la cuestión de que se trata, y que esto prueba que la importancia del estudio de la historia de las matemáticas se reconoce cada vez más.

(4) Según manifiesta M. Mansion en su *Résumé du cours d'Analyse infinitesimal* (página 100), M. Muir llama *wronskiano* de varias funciones x, a, t, u , de una variable real ó imaginaria á un determinante cuyos elementos son éstas y sus derivadas.

(1) Estas investigaciones se han publicado en *The American Journal of Mathematics*, volumen 1-2.—Baltimore.

Pero añade "para que se admita definitivamente esta necesidad, es preciso que la historia de las diferentes ramas de las matemáticas forme parte integrante de los tratados que se destinan á la juventud, no debiendo preceder, por razones pedagógicas, la parte histórica á la parte matemática, sino hallarse repartida en las diferentes partes de ésta. (2)

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.—Los artículos publicados en los números correspondientes á los meses de Junio y Julio son: *Transformation par inversion symétrique*, par M. Bernés; *Coordonnées quadripolaires*, par M. L. Bénézech; *Sur la méthode de transformation* de M. Schoute, par M. E. Vigarié; *Sur la perspective d'une figure plane*, par M. E. Laisant.

MM. Lemoine et Boutin, refiriéndose al artículo de M. de Longchamps *Sur les points et les droites de Feuerbach*, añaden interesantes noticias acerca de los escritos en que se trata de estos elementos notables del triángulo, completadas por la siguiente cuestión que propone M. Lemoine (la 349 de la colección del J. E.):

Sean T, Ta, Tb, Tc los cuatro puntos de contacto del círculo de Feuerbach con el círculo inscrito y los círculos ex-inscritos á un triángulo ABC; se sabe que las tangentes al círculo de Feuerbach tocan á la elipse de área máxima inscrita al triángulo; Sean F', Fa', Fb', Fc', puntos de contacto.

Demostrar las fórmulas:

$$FF' = -\frac{1}{2} \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab} = -\frac{1}{2} \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{p^2-3r\delta},$$

$$F_a F_a' = -\frac{2}{2} \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{a^2+b^2+c^2-bc+ac+ab} = -\frac{1}{2} \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{(p-a)^2+3r_a\delta_a}$$

en las que $\delta=4R+r$ y $\delta_a=4R-r_a$.

También transcribimos para su solución la siguiente cuestión propuesta por M. de Longchamps.

398. Desde un punto M se trazan á una parábola tangentes MA, MB, que cortan al eje de ésta respectivamente en los puntos A', B'.

Demostrar que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$$

(2) Esto puede observarse en los excelentes tratados de matemáticas del Sr. Baltzer, y también en las obras del Sr. Favaro, *Leçons de Statistique graphique*, sobre todo en la segunda parte *Le calcul graphique*.